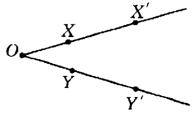
ГЕОМЕТРИЯ

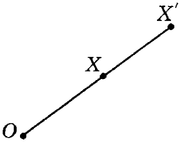
Решение упражнений к учебнику А. В. Погорелова

§ 11. Подобие фигур

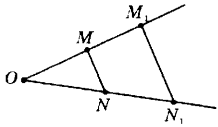
100. Преобразование подобия



1. Проведем через точки X и X' прямую XX', а через точки Y и Y' проведем прямую YY'. Точка пересечения прямых XX' и YY' и будет центром гомотетии O.



2. Если в результате гомотетии точка X переходит в точку X', то по определению гомотетии $\frac{OX'}{OX} = k$, где k — ее коэффициент, а точка O — центр гомотетии. Нужно отложить от точки X отрезок $OX = XX'$, потому что по условию $k = 2$. Конец этого отрезка точка O и является центром гомотетии.



3. Пусть точка O — вершина треугольника OMN и центр гомотетии. Поскольку коэффициент гомотетии $k = 2$, отложим на луче OM точку M_1 так, чтобы $\frac{OM_1}{OM} = k = 2$. Аналогично поступим и на луче ON: $\frac{ON_1}{ON} = 2$.

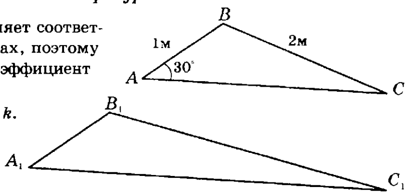
Соединим полученные точки M_1 та N_1 и получим треугольник OM_1N_1, гомотетичный данному ΔOMN с центром гомотетии в точке O.

4. Решение задачи смотри в учебнике Погорелова.

101. Особенности преобразования подобия

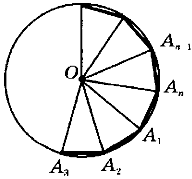
5. Фигурой, подобной треугольнику, является треугольник, поскольку преобразование подобия переводит отрезок в отрезок и сохраняет угол между ними.

102. Подобие фигур

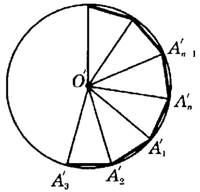


6. Преобразование подобия сохраняет соответствующие углы в треугольниках, поэтому $\angle A_1 = \angle A = 30°$. Определим коэффициент подобия: $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{3\text{м}}{2\text{м}} = = 1{,}5 = k$.

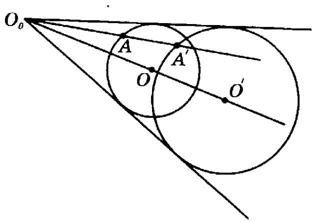
Тогда $A_1B_1 = k \cdot AB = 1{,}5 \cdot 1$ м $= 1{,}5$ (м).



7. Воспользуемся тем, что преобразование подобия сохраняет углы и у подобных фигур соответствующие отрезки пропорциональны. Впишем в окружность с центром в точке O правильный многоугольник с n сторонами $A_1A_2...A_n$. Проведем с каждой вершины многоугольника отрезок к центру окружности. Получим n равнобедренных треугольников A_1OA_2, A_2OA_3, ..., $A_{n-1}OA_n$, A_nOA_1. Потом преобразованием подобия преобразуем все треугольники, которые составляют многоугольник $A_1A_2...A_n$, в треугольники, составляющие соответствующий многоугольник $A_1'A_2'\ldots A_n'$. При неограниченном увеличении сторон и соответствующем уменьшении длины стороны многоугольника многоугольник $A_1A_2...A_n$ перейдет в окружность с центром в точке O, а

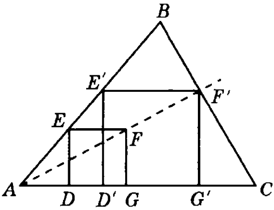


$A_1A_2...A_n$ — в окружность с центром в точке O'. Таким образом, фигура, которую можно получить при подобном преобразовании окружности, тоже является окружностью.



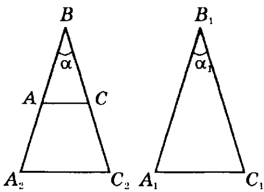
8. Воспользуемся свойствами преобразования подобия. Построим произвольную окружность с центром в точке O', которая соприкасается со сторонами угла. Проведем луч из O_0 через точку A, пересекающую окружность в точке A'. Отрезок O_0A' больше O_0A в k раз. Чтобы построить необходимую нам окружность, нужно на биссектрисе угла $\angle O_0$, где лежат центры всех окружностей, соприкасающихся с обеими сторонами угла, построить отрезок O_0O, который меньше O_0O' в $k = \dfrac{O_0A'}{O_0A}$ раз. Точка O и будет центром искомой окружности, соприкасающихся с обеими сторонами угла O_0 и проходящей через точку A.

9. Воспользуемся свойствами гомотетии. Впишем в треугольник ABC квадрат $DEFG$ таким образом, чтобы одна его вершина E лежала на стороне AB треугольника, а две другие, D и G — на стороне AC. Построим гомотетичный $DEFG$ квадрат $D'E'F'G'$ так, чтобы гомотетичная F вершина F' легла на сторону BC треугольника. При гомотетии углы сохраняются, значит, точки E, D, G, лежащие на сторонах угла $\angle BAC$, перейдут в соответствующие точки E', D', G', лежащие на тех же сторонах треугольника, и поскольку при гомотетии соотношение между частями фигуры сохраняется, то полученная фигура $D'E'F'G'$— квадрат.



103. Признаки подобия треугольников по двум углам

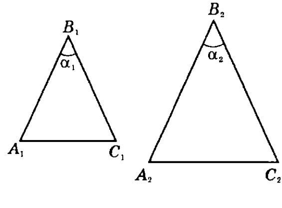
10. Пусть данные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ — равнобедренные и $\alpha = \alpha_1$. Используем гомотетию к треугольнику ABC, взяв вершину B в качестве центра гомотетии. Получим треугольник A_2BC_2, равный $\Delta A_1B_1C_1$. Поскольку $A_1B_1 = A_2B_2 = k \cdot AB$, $B_1C_1 = BC_2 = k \cdot BC$ и $\alpha = \alpha_1$, то треугольники A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку (по двум сторонам и углу между ними). Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны (по первому признаку), поэтому они подобны.



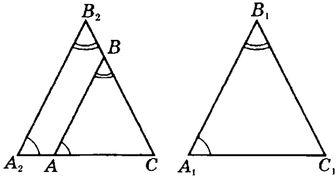
11. Поскольку два равнобедренных треугольника с одинаковыми углами между боковыми сторонами подобны по первому признаку, то

$\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = \dfrac{A_1C_1}{A_2C_2}$. Таким образом, $A_1B_1 =$

$= \dfrac{A_1C_1}{A_2C_2} \cdot A_2B_2 = \dfrac{8\text{ см}}{10\text{ см}} \cdot 17\text{ см} = 13{,}6$ (см).



12. Воспользуемся свойствами преобразования подобия. Используем гомотетию к ΔABC и получим ΔA_2B_2C, равный $\Delta A_1B_1C_1$ (при гомотетии углы сохраняются, поэтому $\angle B_2 = \angle B$, $\angle A_2 = \angle A$, $A_2B_2 = k \cdot AB = A_1B_1$, откуда треугольник $A_1B_1C_1$ равен ΔA_2B_2C по стороне и прилегающим к ним углам), тогда $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C = k \cdot \Delta ABC$. Поэтому



$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$. Таким образом, $k = \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{10\text{м}}{5\text{м}} = 2$. $\dfrac{A_1C_1}{AC} = k \Rightarrow$

$AC = \dfrac{A_1C_1}{k} = \dfrac{8\text{ м}}{2} = 4$ (м). $\dfrac{B_1C_1}{BC} = k \Rightarrow B_1C_1 = BC \cdot k = 7\text{ м} \cdot 2 = 14$ (м).

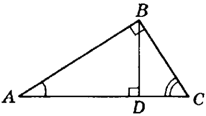
13. Определим коэффициент подобия $k = \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{12\text{см}}{16\text{см}} = \dfrac{3}{4}$, тогда $B_1C_1 = k \cdot BC =$

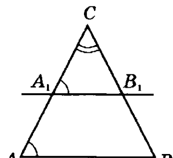
$= \dfrac{3}{4} \cdot 20$ см $= 15$ (см). $A_1C_1 = k \cdot AC$, но, с другой стороны, $AC - A_1C_1 = 6$ см.

Имеем: $AC - k \cdot AC = 6$ см; $AC(1 - k) = 6$ см; $AC = \dfrac{6\text{см}}{1-k} = \dfrac{6\text{см}}{1-\dfrac{3}{4}} = = \dfrac{6\text{см}}{\dfrac{1}{4}} = 24$ (см).

$A_1C_1 = AC - 6\text{ см} = 24\text{ см} - 6\text{ см} = 18$ (см).

14. Рассмотрим рисунок. Треугольники ABC и ABD подобны по теореме 11.2. Действительно, эти треугольники имеют общий угол $\angle A$ и прямые углы: $\angle B$ в ΔABC и $\angle D$ в ΔABD. Аналогично $\Delta ABC \sim \Delta BCD$: общий угол $\angle C$ и прямые углы $\angle B$ в ΔABC и $\angle D$ в ΔBCD.





15. У треугольников ABC и A_1B_1C есть общий угол при вершине C, а $\angle A = \angle A_1$ как соответствующие углы при параллельных прямых A_1B_1 и AB и секущей AC. Таким образом, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ по двум углам.

16. Треугольники ABC и DBE подобны по теореме 11.2 ($\angle B$ общий, а $\angle A = \angle D$ как углы при параллельных прямых AC и DE и секущей AB). Поскольку эти треугольники подобны, то соотношение их оснований равно соотношению их высот: $\dfrac{AC}{DE} = \dfrac{BF}{BG}$. По условию $AC = a$, $DE = x$, $BF = h$, $BG = h - x$, то $\dfrac{a}{x} = \dfrac{h}{h-x}$, откуда $ah - ax = hx$; ah

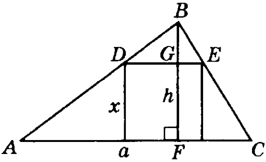
$= hx + ax = x(h + a)$, то есть $x = \dfrac{ah}{h+a}$.

17. $\dfrac{A'C}{AA'} = \dfrac{A'C}{AC - A'C} = \dfrac{m}{n}$; $A'C = \dfrac{m}{n}AC - \dfrac{m}{n}A'C$; $A'C\left(1 + \dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{m}{n}AC$.

* Решения и ответы приводятся к учебникам указанных годов.

Треугольники ACB и $A'CB'$ подобны по двум углам,

поэтому $\frac{A'C}{AC} = \frac{m}{n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{m}{n}\right)} = \frac{m}{n+m} = \frac{CB'}{CB}$.



Но $CB = BB' + CB'$. Тогда $\frac{CB'}{BB' + CB'} = \frac{m}{n+m}$;

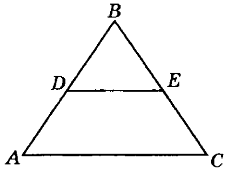
$CB' = \frac{m}{n+m}BB' + \frac{m}{n+m}CB'$; $CB'\left(1-\frac{m}{n+m}\right) = \frac{m}{n+m}BB'$. $\frac{CB'}{BB'} =$

$= \frac{m}{n+m}\cdot\frac{1}{1-\frac{m}{n+m}} = \frac{m}{n+m}\cdot\frac{n+m}{n+m-m} = \frac{m}{n}$.

18. Треугольники ABC и BDE подобны по теореме 11.2.

$AD = AB - BD$; $\frac{BD}{AB} = \frac{DE}{AC}$, откуда $BD = \frac{DE}{AC}AB$. Таким образом, $AD = AB - \frac{DE}{AC}AB = AB\left(1-\frac{DE}{AC}\right) =$

$= 16\text{ см}\cdot\left(1-\frac{15\text{см}}{20\text{см}}\right) = 16\text{ см}\cdot\frac{1}{4} = 4$ (см).



19. Треугольники подобны по теореме 11.2. Имеем: $\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{DB} = \frac{AD+DB}{DB} =$

$= 1 + \frac{AD}{DB}$. Тогда $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{DE} - 1 = \frac{55}{28} - 1 = \frac{55-28}{28} = \frac{27}{28}$.

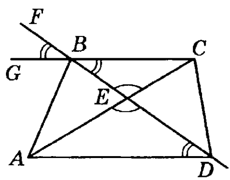
20. 1) Треугольники подобны по теореме 11.2. Имеем:

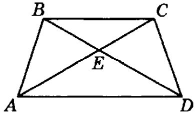
$\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB}$; $DE = \frac{BD}{AB}AC = \frac{11,9\text{ см}}{17\text{ см}}\cdot 20\text{ см} = \frac{238}{17}\text{ см} = 14$ (см).

2) $DE = \frac{BD}{AB}AC = \frac{AB-AD}{AB}AC = \left(1-\frac{AD}{AB}\right)AC = 18\text{ дм}\left(1-\frac{10\text{ дм}}{15\text{ дм}}\right) =$

$= 18\cdot\frac{15-10}{15}\text{ дм} = 18\cdot\frac{5}{15}\text{ дм} = \frac{18}{3}\text{ дм} = 6$ (дм).

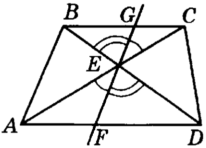
21. $\angle BEC = \angle DEA$ как вертикальные, из параллельности оснований трапеции AD и BC следует, что $\angle CBE = \angle EDA$ как внутренние разносторонние относительно секущей BD ($\angle FBG = \angle EDA$ как углы при параллельных прямых и секущей). Угол EBC равен $\angle FBG = \angle ADE$ как вертикальный. Таким образом, $\angle EBC = \angle EDA$, $\angle AED = \angle CEB$. Эти два треугольника подобны по двум углам.





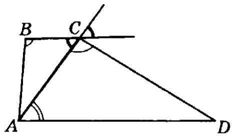
22. Треугольники AED и CEB подобны по двум углам (см. задачу 21), откуда $\dfrac{BE}{ED} = k$, где k — коэффициент подобия. С другой стороны, $k = \dfrac{BC}{AD}$. Имеем: $\dfrac{BE}{ED} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{m}{n}$.

23. Докажем подобие треугольников AEF и CEG, BEG и DEF. $\angle GBE = \angle EDF$, $\angle GCA = \angle FAC$, поскольку эти углы являются углами при параллельных прямых



BC и AD и секущей BD и AC соответственно. $\angle BEG = \angle DEF$ и $\angle CEG = \angle AEF$ как вертикальные при прямых, которые пересекаются, BD и GF и AC и GE соответственно. Поскольку ΔAEF и ΔFED и ΔCEG и ΔBEG являются составляющими частями ΔAED и ΔBEC, подобных друг другу,

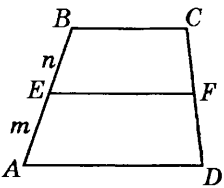
имеем: $\dfrac{BG}{FD} = \dfrac{CG}{AF} \Rightarrow \dfrac{CG}{GB} = \dfrac{AF}{FD} = \dfrac{m}{n}$.



24. $\Delta ABC \sim \Delta DCA$ по теореме 11.2: $\angle ABC = \angle ACD$, $\angle CAD = \angle ACB$ как внутренние разносторонние параллельных прямых BC и AD. Тогда $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$ и

$AC = \sqrt{BC \cdot AD} = \sqrt{12 \cdot 27} = = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 27} = 2\sqrt{81} = = 2 \cdot 9 = 18$ (м).

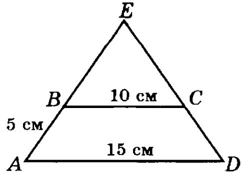
25. Трапеция $ABCD$ является гомотетичной $EBCF$, поскольку все четыре угла одной трапеции равны всем углам другой, а одна сторона сохраняется, откуда имеем:



$$\frac{CD}{CF} = \frac{AB}{EB} = \frac{m+n}{n} = 1 + \frac{m}{n}.$$

С другой стороны, $\dfrac{CD}{CF} = \dfrac{CF + FD}{CF} = 1 + \dfrac{ED}{CF}$.

Таким образом, $1 + \dfrac{FD}{CF} = 1 + \dfrac{m}{n}$, то есть $\dfrac{CD}{CF} = \dfrac{m}{n}$.



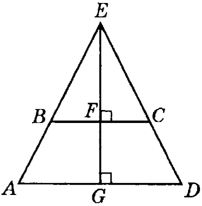
26. Треугольники AED и BEC подобны по теореме 11.2 (общий $\angle E$ и соответствующие углы $\angle EAD = = \angle EBC$, образованные двумя параллельными прямыми AD и BC и секущей EA). Коэффициент подобия $k = \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{15\,\text{см}}{10\,\text{см}} = 1{,}5$. $AE = AB + BE$, $BE = \dfrac{AE}{k}$, откуда $AE = AB + \dfrac{AE}{k}$, $AE - \dfrac{AE}{k} = = AB$,

$$AE\left(1 - \frac{1}{k}\right) = AB, AE = \frac{AB}{1 - \frac{1}{k}} = \frac{5}{1 - \frac{1}{1{,}5}} = = \frac{1{,}5 \cdot 5}{0{,}5}$$

$= 15$ (см). Аналогично $ED = EC + CD$, $EC = \dfrac{ED}{k}$, $ED = CD + \dfrac{ED}{k}$,

$$ED\left(1-\frac{1}{k}\right)=CD,\ ED=\frac{CD}{1-\frac{1}{k}}=\frac{6\,\text{см}}{1-\frac{1}{1,5}}=\frac{1,5\cdot 6\,\text{см}}{0,5}=18\ (\text{см}).$$

27. Треугольники подобны по теореме 11.2 (один угол общий — $\angle E$, а два других $\angle EBC$ и $\angle EAD$ образованы двумя параллельными прямыми и секущей). Коэффициент подобия $k=\frac{AD}{BC}=\frac{21\,\text{см}}{7\,\text{см}}=3.$



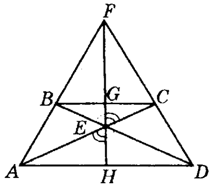
Имеем: $\begin{cases} EG=FG+EF;\\ EG=k\cdot EF;\end{cases}$ откуда

$$EG=FG+\frac{EG}{k},\ EG\left(1-\frac{1}{k}\right)=FG,$$

$$EG=\frac{FG}{1-\frac{1}{k}}=\frac{3\,\text{см}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3\cdot 3\,\text{см}}{2}=4{,}5\ (\text{см}).$$

28. Поскольку треугольники BEG и DEH, CEG и AEH подобны (по двум углам), то $\frac{BG}{HD}=\frac{CG}{AH}$. Но $BG=$ $=BC-CG$, $AH=AD-HD$, поэтому $\frac{BC-CG}{HD}=\frac{CG}{AD-HD}$;

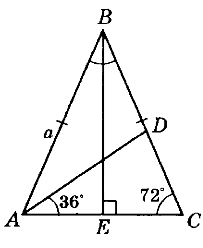
$\frac{BC-CG}{CG}=\frac{HD}{AD-HD}$, или $\left(\frac{BC}{CG}-1\right)\left(\frac{AD}{HD}-1\right)=1.$



Треугольники AFD и BFC подобны по двум углам (угол при вершине F общий, а $\angle FBC=\angle FAD$ как углы между параллельными прямыми и секущей), поэтому $BC=k\cdot AD$, $CG=k\cdot HD$. Имеем: $\frac{BC}{CG}=\frac{k\cdot AD}{k\cdot HD}=$ $=\frac{AD}{HD}$, то есть $\left(\frac{BC}{CG}-1\right)\left(\frac{AD}{HD}-1\right)=\left(\frac{AD}{HD}-1\right)^2=1$. Отсюда $\frac{AD}{HD}-1=\pm1$,

$\frac{AD}{HD}=1\pm1=2$. Второе решение не имеет смысла, поэтому $AD=2HD$, тогда $BC=2CG$, то есть прямая FH делит основы трапеции на две равные части.

29. Треугольники ABC и ADC подобны по теореме 11.2, ($\angle BCA=72°$ — общий, $\angle ABC=\angle CAD=36°$).

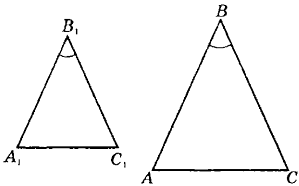


Рассмотрим ΔBEC:
$AC=2EC=2\cdot BC\cos72°=2a\sin18°\approx a\cdot 0{,}618.$
Найдем точное выражение для $\sin18°$. Используем тождество $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$, $\sin36°=\cos54°$;
$\sin(2\cdot18°)=\cos(3\cdot18°)$; $2\sin18°\cdot\cos18°=$
$=4\cos^3 18°-3\cos18°$.
Сократим на $\cos18°$, поскольку $\cos18°\neq0$.
$2\sin18°=4\cos^2 18°-3$, или $4\sin^2 18°+2\sin18°-1=0$.
$D=4+16=20$; $\sqrt{D}=2\sqrt{5}$.

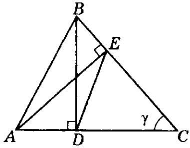
$\sin 18^\circ = \dfrac{-2 \mp \sqrt{20}}{8} = \dfrac{-1 \mp \sqrt{5}}{4}$, так как в первом квадранте $\sin 18^\circ > 0$, то $\sin 18^\circ$ $= \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Отсюда $AC = 2a\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = a\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

104. Признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними

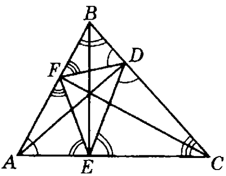
30. Треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны по двум сторонам и углу между ними (теорема 11.3). Поскольку $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{5}{2}$, то $AC = \dfrac{5}{2}A_1C_1$. Также $AC + A_1C_1 = 4{,}2$ м. Тогда $\dfrac{5}{2}A_1C_1 + A_1C_1 = 4{,}2$ м; $A_1C_1\left(\dfrac{5}{2}+1\right) =$ $= A_1C_1\dfrac{7}{2} = 4{,}2$ м, $A_1C_1 = \dfrac{2 \cdot 4{,}2\text{ м}}{7} = 1{,}2$ (м); $AC = \dfrac{5}{2}A_1C_1 = 1{,}2\text{ м} \cdot \dfrac{5}{2} = 3$ (м).



31. Треугольники ABC и DEC имеют общий угол при вершине C. В прямоугольном ΔBCD сторона $DC = BC\cos\gamma$. В прямоугольном ΔAEC сторона $EC = AC\cos\gamma$. Понятно, что стороны треугольника DEC в $\cos\gamma$ раз больше, чем стороны ΔABC. Таким образом, эти треугольники подобны по двум сторонам и углу между ними, то есть по теореме 11.3.



32. В предыдущей задаче доказано, что треугольник с острыми углами подобен треугольнику, имеющему с ними одну общую вершину, а две другие его вершины являются пересечением высот, проведенных из двух других вершин к соответствующим сторонам, то есть $\Delta ABC \sim \Delta DEC$, $\Delta ACB \sim \Delta DFB$, $\Delta BCA \sim \Delta EFA$. Отсюда в ΔAFE $\angle AFE = \angle C$, $\angle FEA = \angle B$; у ΔBFD $\angle BFD =$ $= \angle C$, $\angle BDF = \angle A$; у ΔCDE $\angle CDE = \angle A$, $\angle CED = \angle B$. Следовательно, $\angle E = 180^\circ - 2\angle B$, $\angle D = 180^\circ - 2\angle A$, $\angle F = 180^\circ - 2\angle C$.



33. Поскольку в ΔEDF углы составляют $\angle D = 180^\circ - 2\angle A$, $\angle E = 180^\circ - 2\angle B$, $\angle F = 180^\circ - 2\angle C$, то соответствующие их биссектрисам углы равны $\angle OFD =$ $= \angle OFE = \dfrac{\angle F}{2} = 90^\circ - \angle C$, $\angle ODF = \angle ODE = \dfrac{\angle D}{2} = 90^\circ - \angle A$, $\angle OEF = \angle OED =$ $= \dfrac{\angle E}{2} = 90^\circ - \angle B$. Углы при высотах ΔABC: $\angle BEF = \angle BED = 90^\circ - \angle B$, $\angle CFE = \angle CFD = 90^\circ - \angle C$, $\angle ADF = \angle ADE = 90^\circ - \angle A$. Таким образом, доказано, что биссектрисы ΔDEF лежат на высотах ΔABC.

105. Признак подобия треугольников по трем сторонам

34. Равносторонние треугольники подобны, поскольку:

1) в равностороннем треугольнике все углы равны и равняются 60°, то есть эти треугольники подобны по двум углам;

2) в равностороннем треугольнике все стороны равны, то есть отношение соответствующих сторон этих треугольников одно и то же, значит, эти треугольники подобны по двум сторонам и углу между ними;

3) отношение соответствующих сторон одного равностороннего треугольника к сторонам другого является постоянным, то есть эти треугольники подобны по трем сторонам.

35. Проведем проверку:

1) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{1\,м}{10\,см} = 10$; $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{1{,}5\,м}{15\,см} = 10$; $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{2\,м}{20\,см} = 10$. Да, подобны, поскольку 10 = 10 = 10.

2) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{1\,м}{8\,дм} = \frac{5}{4}$; $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{2\,м}{16\,дм} = \frac{5}{4}$; $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{1{,}5\,м}{12\,дм} = \frac{5}{4}$. Да, подобны, поскольку $\frac{5}{4} = \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$.

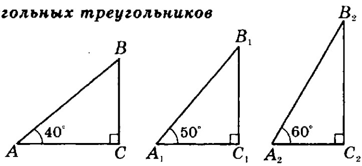
3) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{1\,м}{10\,см} = 10$; $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{2\,м}{20\,см} = 10$; $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{1{,}25\,м}{13\,см} = \frac{125}{13} = 9\frac{8}{13}$. Нет, не подобны, поскольку $10 = 10 \neq 9\frac{8}{13}$.

36. Если $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ (или $\Delta A_1B_1C_1 = k\Delta ABC$), тогда стороны $\Delta A_1B_1C_1$ пропорциональны сторонам ΔABC с коэффициентом k: $A_1B_1 = kAB$, $A_1C_1 = kAC$, $B_1C_1 = kBC$. Определяем периметр треугольника $A_1B_1C_1$. $P_1 = A_1B_1 + A_1C_1 + B_1C_1 = kAB + kAC + kBC = k(AB + AC + BC) = kP$, где P — периметр ΔABC. Таким образом, $\frac{P_1}{P} = k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{C_1B_1}{CB}$.

37. Периметр ΔABC $P = AB + BC + AC = 0{,}8 + 1{,}6 + 2 = 4{,}4$ (м). Из периметров обоих треугольников коэффициент подобия: $\frac{P_1}{P} = \frac{5{,}5\,м}{4{,}4\,м} = \frac{5}{4} = k$, тогда $A_1B_1 = \frac{5}{4}AB = \frac{5}{4}\cdot 0{,}8\,м = 1$ (м); $B_1C_1 = \frac{5}{4}\cdot BC = \frac{5}{4}\cdot 1{,}6\,м = 2$ (м); $A_1C_1 = \frac{5}{4}AC = \frac{5}{4}\cdot 2\,м = 2{,}5$ (м).

38. У подобных треугольников периметры соотносятся как соответствующие стороны: $\frac{P}{P_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{11}{13}$, поэтому $AC = \frac{11}{33}A_1C_1$. Таким образом, $A_1C_1 - AC = A_1C_1 - \frac{11}{13}A_1C_1 = A_1C_1\left(1 - \frac{11}{13}\right) = \frac{2}{13}A_1C_1 = 1$ м. Отсюда $A_1C_1 = \frac{13}{2}\cdot 1$ м $= 6{,}5$ (м). Следовательно, $AC = A_1C_1 - 1$ м $= 6{,}5$ м $- 1$ м $= 5{,}5$ (м).

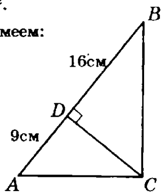
106. Подобие прямоугольных треугольников



39. Первый треугольник подобен данному по двум углам; поскольку сумма углов треугольника равна 180°, то $\angle A_1B_1C_1 = 180° - 90° - \angle B_1A_1C_1 = 90° - 50° = 40°$, и $\angle C = \angle C_1 = 90°$. В треугольнике $A_2B_2C_2$ $\angle C_2 =$

$= 90^\circ$, $\angle B_2A_2C_2 = 60^\circ$, $\angle A_2B_2C_2 = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Если треугольники подобны, то каждому углу в треугольнике ABC соответствует угол в треугольнике $A_2B_2C_2$, но в треугольниках ABC и $A_2B_2C_2$ только $\angle ABC = \angle A_2C_2B_2 = 90^\circ$, другие углы нельзя поставить в соответствие друг другу: $40^\circ \neq 60^\circ$, $40^\circ \neq 30^\circ$, $50^\circ \neq 60^\circ$, $50^\circ \neq 30^\circ$. Таким образом, второй треугольник не является подобным данному.

40. Для треугольника BCD имеем: $BC^2 = DB^2 + DC^2$, для треугольника ADC соответственно $DC^2 = AC^2 - AD^2$, откуда $BC^2 = DB^2 + AC^2 - AD^2$.



С другой стороны, в ΔABC $AC^2 + BC^2 = (AD + BD)^2$, откуда имеем:

$$\begin{cases} BC^2 - AC^2 = DB^2 - AD^2 \ (1); \\ BC^2 + AC^2 = AD^2 + DB^2 + 2AD \cdot DB \ (2). \end{cases}$$

Сложив первое и второе уравнение, имеем:

$BC^2 - AC^2 + BC^2 + AC^2 = 2BC^2 =$

$= DB^2 - AD^2 + AD^2 + DB^2 + 2AD \cdot DB = 2(DB^2 + AD \cdot$

$\cdot DB)$, получим $BC^2 = DB^2\left(1 + \dfrac{AD}{DB}\right)$, $BC = DB\sqrt{1 + \dfrac{AD}{DB}} =$

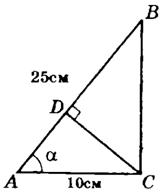
$$= 16 \text{ см} \sqrt{1 + \frac{9\text{ см}}{16\text{ см}}} = 16 \text{ см} \sqrt{\frac{25}{16}} = 4 \cdot 5 \text{ см} = 20 \text{ (см)}.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим:

$$2AC^2 = 2AD^2\left(1 + \frac{BD}{AD}\right), \text{ имеем } AC = AD\sqrt{1 + \frac{BD}{AD}} = 9 \text{ см} \sqrt{1 + \frac{16\text{ см}}{9\text{ см}}} =$$

$$= 9 \text{ см} \sqrt{\frac{9 + 16}{9}} = 9 \text{ см} \cdot \frac{5}{3} = 15 \text{ (см)}.$$

41. Рассмотрим соответствующие треугольники. В ΔADC $AD = AC \cdot \cos\alpha$. В ΔABC $AC =$

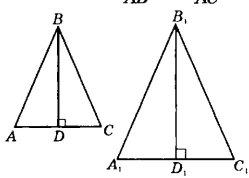


$= AB \cdot \cos\alpha$, откуда $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$ и $AD = AC\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AC^2}{AB}$, которая является проекцией катета AC на гипотенузу AB. Найдем проекцию на гипотенузу катета BC: $DB = AB - AD = AB - \dfrac{AC^2}{AB} =$

$$= AB\left(1 - \left(\frac{AC}{AB}\right)^2\right) = 25 \text{ см}\left(1 - \left(\frac{10\text{ см}}{25\text{ см}}\right)^2\right) = 25 \text{ см}\left(1 - \frac{100}{625}\right) =$$

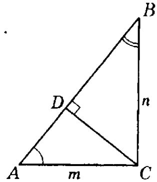
$$= 25 \text{ см}\left(\frac{625 - 100}{625}\right) = \frac{525}{25} \text{ см} = 21 \text{ (см)}.$$

42. Пусть $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, или $\Delta A_1B_1C_1 = k\Delta ABC$. Тогда имеем $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC} =$



$= \dfrac{B_1C_1}{BC} = k$. Рассмотрим треугольники BDC и $B_1D_1C_1$. Они подобны по двум углам: $\angle C = \angle C_1$ и $\angle BDC = \angle B_1D_1C_1 = 90^\circ$ как углы при высоте треугольника и его основе, откуда $\dfrac{B_1D_1}{BD} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = k$.

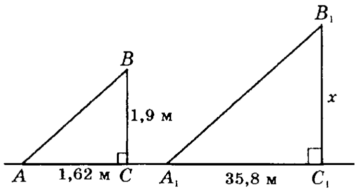
43. Рассмотрим соответствующие треугольники. В ΔADC $AD = AC \cdot \cos\angle CAD$, в ΔBDC $BD = BC \cdot \cos\angle CBD$, тогда $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AC}{BC} \cdot \dfrac{\cos\angle CAD}{\cos\angle CBD}$.



$\cos\angle CAD = \dfrac{AC}{AB}$, $\cos\angle CBD = \dfrac{BC}{AB}$, $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{m}{n}$.

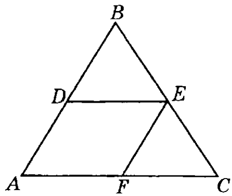
Таким образом, $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{AC}{AB} \cdot \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{m^2}{n^2}$.

44. По условию задачи имеем два подобных треугольника: ΔABC, соответствующей жерди, и $\Delta A_1B_1C_1$, что соответствующий фабричной трубе. Они подобны, поскольку углы $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, поскольку считаем ход солнечных лучей возле земной поверхности параллельным.



Тогда $\dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$, откуда $B_1C_1 = \dfrac{A_1C_1}{AC} \cdot BC = \dfrac{35{,}8\text{ м}}{1{,}62\text{ м}} \cdot 1{,}9\text{ м} \approx 42$ (м).

45. Треугольники ABC и DEB подобны по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle BDE = \angle BAC$ как углы при параллельных прямых ACи DE и секущей BA), откуда имеем: $\dfrac{AC}{DE} = \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AB}{AB - AD}$.

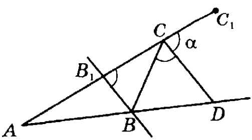


Поскольку $DE = AD$, $AC = b$, $AC = c$, то

$\dfrac{b}{AD} = \dfrac{c}{c - AD}$; $b(c - AD) = cAD$; $bc = AD(c + b)$.

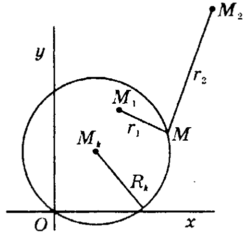
Таким образом, $AD = \dfrac{bc}{b + c}$.

46. Используем при решении подобие треугольников. Сначала проведем через точку B прямую $BB_1 \parallel CD$. Треугольники AB_1B и ACD подобны по двум углам ($\angle A$ — общий, $\angle C_1CD = \angle CB_1B$ как соответствующие углы при параллельных прямых и секущей; если равны между собой внешние углы треугольников, то соответствующие им внутренние углы тоже равны, поэтому $\angle AB_1B = \angle ACD = 180° - \alpha$).



Треугольник BB_1C — равнобедренный, поскольку $\angle B_1BC = 180° - \angle CB_1B - \angle B_1CB = 180° - \alpha - 180° + 2\alpha = \alpha$. Имеем: $CB_1 = CB$. Таким образом, $\dfrac{AB_1}{AC} = \dfrac{AB}{AD}$; $\dfrac{AC - CB_1}{AC} = \dfrac{AD - BD}{AD}$; $1 - \dfrac{CB_1}{AC} = 1 - \dfrac{BD}{AD}$; $\dfrac{CB_1}{AC} = \dfrac{BD}{AD}$; учитывая, что $CB_1 = CB$, имеем $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$.

47. Обозначим $r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$ и $r_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}$ расстояния от точек M_1 и M_2 до любой точки.



Имеем: $\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}}$;

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2};$$

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left((x-x_2)^2 + (y-y_2)^2\right) = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2;$$

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\left(x^2 - 2xx_2 + x_2^2\right) + \left(y^2 - 2yy_2 + y_2^2\right)\right) =$$

$$= x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2.$$

Приведем подобные члены уравнения:

$$\left(1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right)x^2 + 2\left(x_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - x_1\right)x + \left(1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right)y^2 + 2\left(y_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - y_1\right)y =$$

$$= x_1^2 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 x_2^2 + y_1^2 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 y_2^2 = x_1^2 - y_1^2 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\left(x_2^2 + y_2^2\right) = r_1^2 - \frac{r_1^2}{r_2^2}r_2^2 = r_1^2 - r_1^2 = 0.$$

Разделим уравнение на $\left(1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right)$:

$$x^2 + 2x\left(\frac{x_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - x_1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\right) + y^2 + 2y\left(\frac{y_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - y_1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\right) = 0,$$

прибавим к левой и правой части уравнения сумму

$$\left(\frac{x_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - x_1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{y_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - y_1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\right)^2,$$ тогда

$$x^2 + 2x\left(\frac{x_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - x_1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\right) + \left(\frac{x_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - x_1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\right)^2 + y^2 + 2y\left(\frac{y_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - y_1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{y_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - y_1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\right)^2 = \left(\frac{x_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - x_1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{y_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - y_1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\right)^2.$$

Таким образом,

$$\left(x+\frac{x_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2-x_1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\right)^2+\left(y+\frac{y_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2-y_1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\right)^2=\left(\frac{x_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2-x_1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\right)^2+\left(\frac{y_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2-y_1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\right)^2.$$

Полученное уравнение является уравнением окружности радиусf

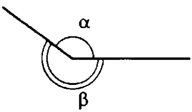
$$R_k=\sqrt{\left(\frac{x_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2-x_1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\right)^2+\left(\frac{y_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2-y_1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\right)^2}$$ с центром в точке

$$M_k(x_k,y_k)=\left(\frac{x_1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2x_2}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2},\frac{y_1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2y_2}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\right)$$ по условию,

что $\left|\frac{r_1}{r_2}\right|\neq 1$.

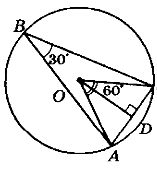
107. Углы, вписанные в окружность

48. Сумма дополняющих углов α и β равна 360°: $\alpha+\beta=360°$.



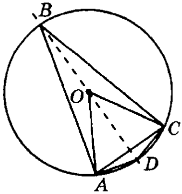
1) $\beta=5\alpha$. Отсюда $\alpha+5\alpha=360°$; $6\alpha=360°$; $\alpha=60°$; $\beta=60°\cdot 5=300°$.
2) $\beta=\alpha+100°$. Таким образом, $\alpha+\alpha+100°=360°$; $2\alpha=260°$; $\alpha=130°$. Отсюда $\beta=130°+100°=230°$.
3) $\beta-\alpha=20°$, то есть $\beta=\alpha+20°$. Отсюда $\alpha+\alpha+20°=360°$; $2\alpha=340°$; $\alpha=170°$. Следовательно, $\beta=170°+20°=190°$.

49. Соответствующим вписанному в окружность углу ABC является больший в два раза центральный угол $\angle AOC=2\angle ABC=60°$, опирающийся на ту же хорду AC. Треугольник AOC — равнобедренный ($AO=OC=R$). Поскольку $\angle AOC=60°$, треугольник равносторонний, то $AC=AO=OC=R=\frac{D}{2}=\frac{10}{2}$ см $=5$ (см).



50. 1) В равностороннем треугольнике все три угла равны 60°. Таким образом, $\angle AOC=60°$. Этот угол является центральным по отношению к $\angle ABC$. Таким образом,

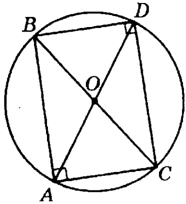
$$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}60°=30°$$ (по теореме 11.5).

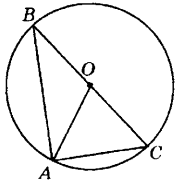


$\angle ADC$ опирается на хорду AC, точка D играет роль точки B во втором случае.

2) Треугольник ODC подобен ΔABC по двум сторонам и углу между ними: $AB=BC$ и $OD=OC=R$, $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$ и $\angle DOC=\frac{1}{2}\angle AOC$. $\angle ODC=\angle BAC$ — углы, опирающиеся на BC. Таким образом, $\angle ADC=2\angle ODC=2\angle BAC=180°-\angle ABC=180°-30°=150°$.

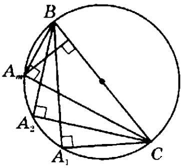
51. Сначала опишем около прямоугольного треугольника ABC окружность, центр которой находится на гипотенузе BC (см. доказательство теоремы 11.5). Построим еще один прямоугольный треугольник ΔADC с катетом AC. Он равен ΔABC: AC — общий катет, $\angle BAC = \angle DCA = 90°$, $\angle DAC = = \angle BCA$. Центр окружности должен находиться на гипотенузе AD (по теореме 11.5). Но для того, чтобы центр окружности одновременно находился на BC и на AD, необходимо, чтобы он находился в точке их пересечения O, являющейся точкой пересечения диагоналей $ABDC$. Так как диагонали прямоугольника делят друг друга пополам, то $OB = OC = = OD = OA$. Таким образом, $R = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AD}{2}$.



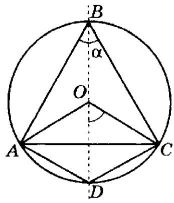


52. Опишем около прямоугольного треугольника ABC окружность и проведем медиану AO. Точка O делит гипотенузу пополам (см. предыдущую задачу): $BO = OC = R$. Но медиана $AO = R$. Имеем: в ΔABO $BO = AO = R$, а в ΔAOC $AO = OC = R$, то есть оба треугольника равнобедренные.

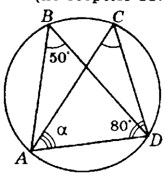
53. Опишем около данной гипотенузы окружность, диаметр которой равен длине гипотенузы. Опираясь на диаметр BC, можем построить бесконечное множество прямоугольных треугольников, высота которых изменяется в интервале $0 < h \leq R$: A_1BC, A_2BC и так далее. Если задана высота треугольника, построим от диаметра окружности к окружности такой длины, чтобы она была равна высоте прямоугольного треугольника. В точке пересечения этого перпендикуляра с окружностью и находится вершина прямого угла треугольника.



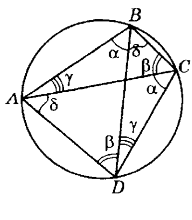
54. 1) Пусть точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC. Так как при постоянном значении длины хорды AC вписанный в окружность угол a сохраняется независимо от соотношения AB и BC, построим равнобедренный треугольник ABC. Соответствующий $\angle ABC$ центральный угол $AOC = 2\alpha$, отсюда $\angle DOC = \dfrac{1}{2}\angle AOC = \alpha$. Поэтому треугольники ABC и DOC подобны по двум сторонам ($AB = BC$ и $DO = CO = R$) и углу между ними, тогда $\angle ADC = 2\angle ODC = 2 \cdot \dfrac{180° - \alpha}{2} = 180° - \alpha$.



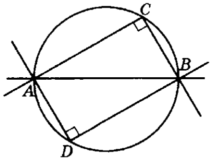
2) Если точки B и D лежат по одну сторону от прямой AC, то $\angle ADC = \angle ABC = \alpha$ (по теореме 11.5).



55. Углы ABD и ACD опираются на одну и ту же хорду, поэтому они равны между собой: $\angle ACD = \angle ABD = 50°$. В ΔACD: $\alpha = 180° - \angle ACD - \angle ADC = 180° - 50° - 80° = 50°$.

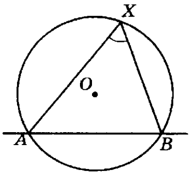


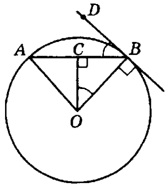
56. Проведем диагонали нашего четырехугольника. Каждая из сторон четырехугольника является хордой, на которую опираются по два вписанных угла, образованные одной стороной и диагональю. Поэтому $\angle ABD = \angle ACD$, $\angle ACB = \angle ADB$, $\angle BAC = \angle BDC$, $\angle CBD = \angle CAD$. В трегольнике ABC сумма углов равна $180°$: $\angle BAC + \angle ABD + \angle DBC + \angle BCA = \gamma + \alpha + \delta + \beta = 180°$. Сумма противоположных углов четырехугольника равна $\angle ABD + \angle DBC + \angle CDB + \angle BDA = \alpha + \delta + \gamma + \beta = 180°$. Сумма двух других углов четырехугольника равна $360° - 180° = 180°$.



57. Обозначим через AB диаметр окружности, которая будет описана прямым углом. Полуокружность, находящаяся выше диаметра AB, будет образована углом ACB, если постепенно будет изменяться катет ΔACB в интервале $0 < CB < AB$, оставляя гипотенузу AB неизменной и угол $ACB = 90°$. Нижняя полуокружность будет построена аналогично углом ADB.

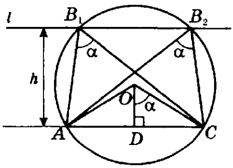
58. Пусть A и B — две точки, которые находятся на сторонах угла AXB. Опишем около ΔAXB окружность. Тогда угол AXB является (по построению) вписанным в окружность. Отсюда следует, что $\angle AXB$ сохраняется, если вершина X находится в любой точке окружности по одну сторону от прямой AB. Таким образом, геометрическим местом вершин углов с данной градусной мерой, стороны которых проходят через две данные точки, а вершины лежат с одной стороны от прямой, соединяющей эти точки, является дуга окружности с концами в этих точках.





59. Угол между радиусом окружности и касательной в любой точке окружности составляет $90°$, поэтому $\angle OBD = 90°$. Угол между хордой AB и радиусом OB равен $\angle OBC = 180° - \angle OCB - \angle COB = 90° - \angle COB$. Таким образом, угол между касательной DB и хордой AB составляет: $\angle ABD = \angle OBD - \angle OBC = 90° - (90° - \angle COB) = \angle COB$.

60. Построим основу треугольника AC и параллельную к ней прямую l на расстоянии, равном высоте h. Найдем середину основы D. Из середины основы проведем перпендикуляр DO так, чтобы $\angle DCO = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$, то есть $\angle DOC = \alpha$. Потом построим окружность с центром в точке O и радиусом $R = OC$. $\angle AOC = 2\alpha$ является центральным углом этой окружности. По теореме 11.5 любой угол, вершина которого лежит на окружности, и опирается на хорду AC, равен половине центрального угла, опирающегося на эту хорду. Таким образом, угол, вершина которого лежит на окружности, равен α. В точках пересечения окружности с прямой l расстояние между вершиной угла α и основой равно h. Таких точек две: B_1 и B_2. Построим два треугольника AB_1C и AB_2C.



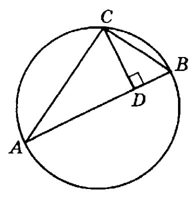
108. Пропорциональность отрезков хорд и касательных окружности

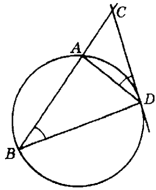
61. Если AB — диаметр окружности, то треугольник ABC — прямоугольный. Он подобен треугольнику ACD и CBD по двум углам:

$\angle ACB = \angle ADC = \angle BDC = 90°$,

$\angle A$ — общий у треугольников ABC и ACD, $\angle B$ — общий у треугольников ABC и CBD. Поскольку эти три треугольника подобны, то

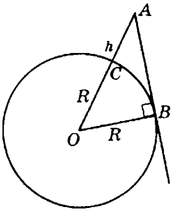
$\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{CD}$. Таким образом, $CD^2 = AC \cdot BC$.





62. Треугольники BCD и ACD подобны по двум углам: $\angle BCD = \angle ACD = \angle C$ — общий угол, $\angle CBD = \angle CDA$, тогда $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{BC}$. Таким образом, $AC \cdot BC = CD^2$.

63. Если AB — расстояние, которое видно с высоты $AC = h$, то из прямоугольного треугольника OAB имеем:



$$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{(OC + AC)^2 - OB^2} = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} =$$

$$= \sqrt{R^2 + 2Rh + h^2 - R^2} = \sqrt{h^2 + 2Rh} = h\sqrt{1 + \frac{2R}{h}} = 4 \text{ (км)},$$

$$\sqrt{1 + \frac{2 \cdot 6370}{4}} = 56{,}4 \cdot 4 \text{ км} = 225{,}8 \text{ (км)}.$$

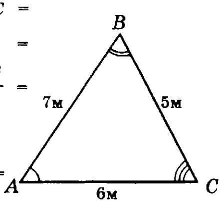
64. Из предыдущей задачи имеем: $r = AB = \sqrt{h^2 + 2Rh} = h\sqrt{1 + \frac{2R}{h}} =$

$$= 373 \text{ м} \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 6370}{0{,}373}} = 373 \text{ м} \cdot 184{,}8 = 68\,936 \text{ м} \approx 68{,}9 \text{ (км)}.$$

§ 12. Решение треугольников

109. Теорема косинусов

1. По теореме косинусов $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC\cos\angle C$, поэтому $BC^2 + AC^2 - AB^2 = 2BC \cdot AC$. $\cos\angle C$, $\cos\angle C =$



$$= \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{25 + 36 - 49}{2 \cdot 30} =$$

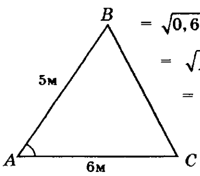
$$= \frac{12}{60} = \frac{1}{5}.$$ Соответственно $\cos\angle B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} =$

$$= \frac{49 + 25 - 36}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{74 - 36}{70} = \frac{38}{70} = \frac{19}{35}.$$

Для $\angle A$: $\cos\angle A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{49 + 36 - 25}{2 \cdot 7 \cdot 6} =$

$$= \frac{85 - 25}{84} = \frac{60}{84} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}.$$

2. $\cos^2\angle A + \sin^2\angle A = 1$, тогда $\cos\angle A = \sqrt{1 - \sin^2\angle A} = \sqrt{1 - 0{,}6^2} = \sqrt{1 - 0{,}36} =$



$= \sqrt{0{,}64} = \pm 0{,}8$. По теореме косинусов если $\cos\angle A = +0{,}8$, то $BC =$

$$= \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC\cos A} = \sqrt{5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 0{,}8} \text{ м} =$$

$= \sqrt{61 - 48}$ м $= \sqrt{13}$ (м), если $\cos\angle A = -0{,}8$, то

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot AC\cos A} = \sqrt{25 + 36 + 60 \cdot 0{,}8} \text{ м} =$$

$$= \sqrt{61 + 48} \text{ м} = \sqrt{109} \text{ м}.$$

3. Используем теорему косинусов:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(a\hat{\ }b)$, де $(a\hat{\ }b)$ — угол между сторонами a и b, то есть противоположный c.

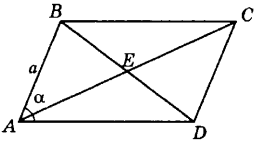
Перенесем из правой части уравнения $a^2 + b^2$ в левую часть:

$c^2 - (a^2 + b^2) = -2ab\cos(a\hat{\ }b)$, или $2ab\cos(a\hat{\ }b) = a^2 + b^2 - c^2$.

Если $a^2 + b^2 > c^2$, то правая часть больше нуля и косинус угла $(a\hat{\ }b)$ тоже больше нуля. Отсюда следует, что угол $(a\hat{\ }b)$ острый, потому что косинус острого угла — положительное число. Если $a^2 + b^2 < c^2$, то правая часть уравнения — отрицательное число. Таким образом, левая часть тоже отрицательная, а косинус угла $(a\hat{\ }b)$ меньше нуля. Таким образом, $(a\hat{\ }b) > 90°$, поскольку косинус тупого угла меньше нуля.

4. По теореме косинусов $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\alpha$, тогда

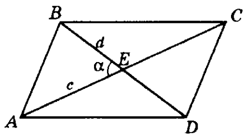
$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD\cos\alpha} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$.



Сумма углов в четырехугольнике равна 360°:
$360° = \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB =$
$= 2(\angle BAD + \angle ADC)$, поскольку в параллелограмме противоположные углы равны. Таким образом, $\angle ADC = 180° - \angle BAD$. $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, тогда для ΔACD по теореме косинусов $AC^2 = AD^2 + + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos\alpha$,

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2 + 2 \cdot AD \cdot CD\cos\alpha} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$.

5. В треугольнике ABE по теореме косинусов $AB^2 = BE^2 + AE^2 - 2BE \cdot AE\cos\alpha$, поэтому

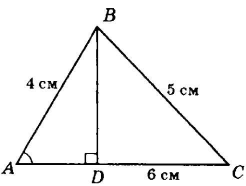


$$AB = \sqrt{\left(\frac{BD}{2}\right)^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{BD}{2} \cdot \frac{AC}{2} \cdot \cos\alpha} =$$

$= \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2 - 2cd\cos\alpha}$. В треугольнике AED угол AED равен $180° - \alpha$ как внешний к α. Косинус этого угла составляет $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ для угла α: $0° < \alpha < 180°$. По теореме косинусов имеем:

$$AD = BC = \sqrt{ED^2 + AE^2 + 2 \cdot ED \cdot AE\cos\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha}.$$

6. По теореме косинусов: $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC\cos\angle C$, тогда $\cos\angle C =$



$= \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} = \frac{25 + 36 - 16}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos\angle A$, тогда $\cos\angle A =$

$= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{16 + 36 - 25}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}$.

В треугольнике ABD $AD = AB\cos\angle A = \frac{9}{16} \cdot 4$ см $=$

$= \frac{9}{4}$ см $= 2\frac{1}{4}$ (см). В треугольнике CBD:

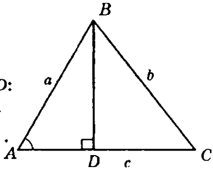
$DC = = BC\cos\angle C = \frac{3}{4} \cdot 5$ см $= \frac{15}{4}$ см $= 3\frac{3}{4}$ (см).

7. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos\angle A$, то есть

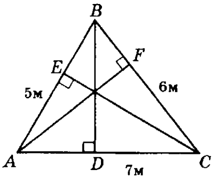
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle A$, тогда

$\cos\angle A = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Высоту BD вычислим из ΔABD:

$BD = AB\sin\angle A = a\sqrt{1-\cos^2\angle A} = a\sqrt{1 - \dfrac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2c^2}}$.



8. По теореме косинусов определим косинусы углов данного треугольника:



$\cos\angle A = \dfrac{25+49-36}{2\cdot5\cdot7} = \dfrac{19}{35}$;

$\cos\angle B = \dfrac{25+36-49}{2\cdot5\cdot6} = \dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{5}$;

$\cos\angle C = \dfrac{36+49-25}{2\cdot6\cdot7} = \dfrac{60}{12\cdot7} = \dfrac{5}{7}$.

Соответственно $\sin\angle C = \sqrt{1-\cos^2\angle C} = \sqrt{1-\dfrac{25}{49}} = \dfrac{1}{7}\sqrt{24} = \dfrac{2}{7}\sqrt{6}$;

$\sin\angle B = \sqrt{1-\cos^2\angle B} = \sqrt{1-\dfrac{1}{25}} = \dfrac{1}{5}\sqrt{24} = \dfrac{2}{5}\sqrt{6}$;

$\sin\angle A = \sqrt{1-\cos^2\angle A} = \sqrt{1-\dfrac{361}{1225}} = \dfrac{1}{35}\sqrt{864} = \dfrac{12}{35}\sqrt{6}$.

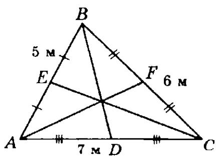
В ΔEBC $EC = BC\cdot\sin\angle B = 6$ м $\cdot \dfrac{2}{5}\sqrt{6} = \dfrac{12}{5}\sqrt{6}$ (м).

В ΔABF $AF = AB\cdot\sin\angle B = 5$ м $\cdot \dfrac{2}{5}\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ (м).

В ΔABD $BD = AB\cdot\sin\angle A = 5$ м $\cdot \dfrac{12}{35}\sqrt{6} = \dfrac{12}{7}\sqrt{6}$ (м).

9. Косинусы углов данного треугольника вычислены в предыдущей задаче:

$\cos\angle A = \dfrac{19}{35}$; $\cos\angle B = \dfrac{1}{5}$, $\cos\angle C = \dfrac{5}{7}$. Медиану AF определяем из ΔAFC по теореме косинусов:



$AF = \sqrt{FC^2 + AC^2 - 2\cdot FC\cdot AC\cos\angle C} =$

$= \sqrt{3^2 + 7^2 - 2\cdot3\cdot7\cdot\dfrac{5}{7}}$ м $= \sqrt{28}$ м $= 2\sqrt{7}$ (м).

Аналогично находим медиану BD из ΔABD:

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2\cdot AB\cdot AD\cos\angle A} =$

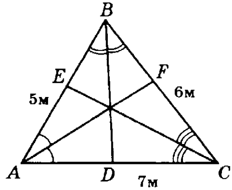
$= \sqrt{5^2 - \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 - 2\cdot5\cdot\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{19}{35}}$ м $= \dfrac{1}{2}\sqrt{100+49-76}$ м $= \dfrac{\sqrt{73}}{2}$ (м).

Медиану EC находим из ΔEBC:

$EC = \sqrt{EB^2 + BC^2 - 2\cdot EB\cdot BC\cos\angle B} = \sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 6^2 + 2\cdot\dfrac{5}{2}\cdot6\cdot\dfrac{1}{5}} = \sqrt{\dfrac{25}{4} + 30} =$

$= \dfrac{\sqrt{145}}{2}$ (м).

10. Вычислим косинусы углов треугольника по теореме косинусов:



$$\cos\angle A = \frac{25+49-36}{2\cdot5\cdot7} = \frac{19}{35};$$

$$\cos\angle B = \frac{25+36-49}{2\cdot5\cdot6} = \frac{1}{5};$$

$$\cos\angle C = \frac{36+49-25}{2\cdot6\cdot7} = \frac{5}{7}.$$

Тогда $\sin\angle A = \sqrt{1-\frac{19^2}{35^2}} = \frac{1}{35}\sqrt{1225-361} = \frac{12}{35}\sqrt{6}$;

$\sin\angle B = \sqrt{1-\frac{1}{5^2}} = \frac{1}{5}\sqrt{24} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$;

$\sin\angle C = \sqrt{1-\frac{5^2}{7^2}} = \frac{1}{7}\sqrt{49-25} = \frac{1}{7}\sqrt{24} = \frac{2}{7}\sqrt{6}$.

По теореме синусов в ΔAEC $\frac{EC}{\sin\angle A} = \frac{AC}{\sin\left(180^\circ-\left(\angle A+\frac{\angle C}{2}\right)\right)}$, тогда

$$EC = AC\cdot\frac{\sin\angle A}{\sin\left(\angle A+\frac{\angle C}{2}\right)} = AC\frac{\sin\angle A}{\sin\angle A\cos\frac{\angle C}{2}+\sin\frac{\angle C}{2}\cos\angle A}.$$

Из равенства $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos2\alpha}{2}$ имеем: $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{2}}$;

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{2}}$.

Поэтому $EC = AC\cdot\frac{\sin\angle A}{\sin\angle A\sqrt{\frac{1+\cos\angle C}{2}}+\cos\angle A\sqrt{\frac{1-\cos\angle C}{2}}} =$

$$= 7\text{ м}\frac{12\frac{\sqrt6}{35}}{\frac{12\sqrt6}{35}\sqrt{\frac{1+\frac{5}{7}}{2}}+\frac{19}{35}\sqrt{\frac{1-\frac{5}{7}}{2}}} = \frac{7\cdot12\cdot\sqrt6\text{м}}{12\sqrt6\sqrt{\frac{12}{14}}+19\sqrt{\frac{1}{7}}} = \frac{7\cdot12\cdot\sqrt{6\cdot7}\text{м}}{12\cdot6+19} =$$

$= \frac{7\cdot12}{91}\sqrt{42}\text{м} = \frac{12}{13}\sqrt{42}$ (м).

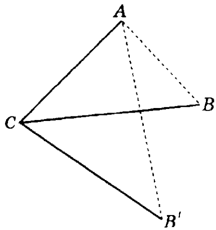
Аналогично из ΔAFC имеем:

$$AF = AC\frac{\sin\angle C}{\cos\angle C\sqrt{\frac{1-\cos\angle A}{2}}+\sin\angle C\sqrt{\frac{1+\cos\angle A}{2}}} = \frac{\sqrt{105}}{2}\text{ (м)}.$$

Из ΔBDC имеем:

$$BD = BC\frac{\sin\angle C}{\cos\angle C\sqrt{\frac{1-\cos\angle B}{2}}+\sin\angle C\sqrt{\frac{1+\cos\angle B}{2}}} = \frac{12}{11}\sqrt{15}\text{ (м)}.$$

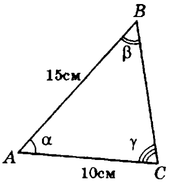
11. Зависимость длины стороны AB от угла C определяем по теореме косинусов:



$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle C}$. Если $\angle C$ возрастает от 0 до 90°, его косинус уменьшается от 1 до 0. Если $\angle C$ возрастает от 90° до 180°, его косинус уменьшается от 0 до −1. Таким образом, выражение под знаком корня возрастает от своего минимального значения $AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC$ до максимального $AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot BC$, а если возрастает выражение под знаком корня, то соответственно возрастает и AB.

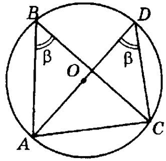
110. Теорема синусов

12. По теореме синусов

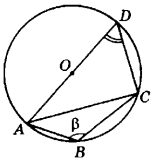


$$\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{AC}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{AB}{AC}\sin\beta = \frac{15см}{10см}\cdot\frac{3}{4} = \frac{45}{40} = 1\frac{1}{8} > 1.$$

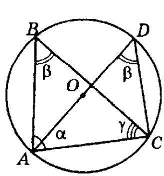
Имеем, что при $\sin\beta = \frac{3}{4}$ $\sin\gamma = 1\frac{1}{8} > 1$, что является невозможным, так как $-1 < \sin\gamma < 1$. Поэтому в данном треугольнике $\sin\beta \neq \frac{3}{4}$.



13. Впишем треугольник ABC в окружность и проведем диаметр AD. Вписанные углы, опирающиеся на одну хорду, равны между собой (если B и D лежат по одну сторону от прямой AC). Отсюда $AC = AD\sin\beta$, или $\frac{AC}{\sin\beta} = 2R$. Если точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC, то угол $ADC = 180° - \beta$ (задача 50, § 11). Поскольку $\sin(180° - \beta) = \sin\beta$, то $AC = AD\sin\angle ADC = AD\sin\beta$. Поэтому имеем: $\frac{AC}{\sin\beta} = AD = 2R$.



14. Проведем диаметр AD, который будет гипотенузой прямоугольного треугольника ADC (следствие из теоремы 11.5). В ΔADC $\angle ADC = \angle ABC = \beta$, так как оба угла опираются на хорду AC, поэтому $AD = 2R = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sqrt{1-\cos^2\beta}}$.



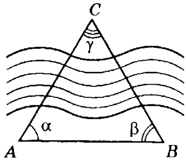
Косинус β находим из ΔABC по теореме косинусов: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\beta$, откуда

$$\cos\beta = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}.$$

Таким образом, $R = \frac{AC}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\beta}} =$

$$= \frac{5}{2}\text{ см}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{36+49-25}{2\cdot6\cdot7}\right)^2}} = 2{,}5\text{ см}\sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}} = \frac{2{,}5\text{см}\cdot7}{\sqrt{24}} = \frac{35}{4\sqrt{6}}\text{ (см)}.$$

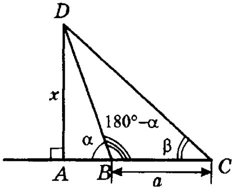
15. Воспользуемся теоремой синусов. Определим угол γ: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, тогда $\sin\gamma = \sin(180° - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$.



По теореме синусов $\dfrac{AB}{\sin\beta} = \dfrac{AC}{\sin\gamma} = \dfrac{AC}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Тогда $AB = AC\dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

16. Рассмотрим $\Delta\, BCD$. По теореме синусов имеем: $\dfrac{BD}{\sin\angle BCD} = \dfrac{BC}{\sin\angle BDC}$.



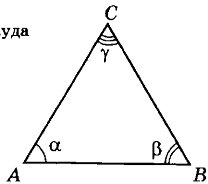
$BD = \dfrac{BC}{\sin\angle BDC}\sin\angle BCD$. $\angle BDC = 180° - \angle BCD - \angle DBC$; $\angle DBC = 180° - \alpha$ и $\angle ABD = \alpha$ — смежные, $\angle BDC = 180° - \beta - 180° + \alpha = \alpha - \beta$.

Тогда $BD = a\dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. Из ΔABD по теореме синусов имеем: $\dfrac{BD}{\sin 90°} = BD = \dfrac{AD}{\sin\angle ABD}$, или $AD = BD\sin\alpha = a\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

111. Соотношение между углами треугольника и противоположными сторонами

17. В треугольнике может быть только один тупой угол, потому что сумма двух других углов в этом случае меньше 90°.

Пусть $180° = \alpha + \beta + \gamma$, $\beta > 90°$, или $\beta = 90° + \beta'$, откуда $180° = \alpha + \gamma + 90° + \beta'$, $\beta' > 0$.
Тогда $\alpha + \gamma = 180° - 90° - \beta' = 90° - \beta' < 90°$.



По теореме синусов $\dfrac{AC}{\sin\beta} = \dfrac{BC}{\sin\alpha}$, то есть

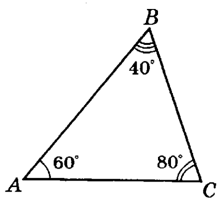
$\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, так как $\beta > \alpha$, то $\sin\beta > \sin\alpha$.

Отсюда $\dfrac{AC}{BC} > 1$. Также $\dfrac{AC}{AB} > 1$, так как $\beta > \gamma$ и $\sin\beta > \sin\gamma$. Отсюда AC — наибольшая сторона треугольника.

18. Все три угла острые, откуда следует, что чем больший угол, тем больше его синус. Соответственно имеем $\angle B < \angle A < \angle C$. По теореме синусов:

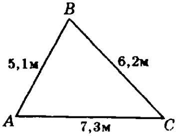
$AB = \dfrac{AC}{\sin 40°}\sin 80°$, $BC = \dfrac{AC}{\sin 40°}\sin 60°$,

$AC = \dfrac{AB}{\sin 80°}\sin 40°$.

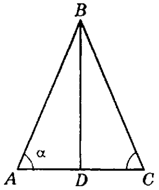


Так как отношение сторон синусам противоположных им углов постоянное, то каждая сторона пропорциональна синусу противоположного к ней угла, то есть пропорциональна самому углу. Значит, $AB > BC > AC$.

19. В предыдущей задаче доказано, что чем больше угол треугольника, тем больше противоположная к нему сторона. Таким образом, если $AC > BC > AB$, то $\angle B > \angle A > \angle C$.

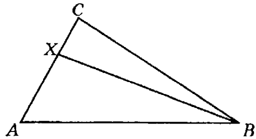


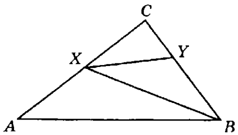
20. Если в равнобедренном треугольнике угол между боковой стороной и основой равен 60°, то этот треугольник равносторонний: $\frac{AB}{AC} = 1$. Если увеличивать угол α, то угол ABC соответственно будет уменьшаться, поэтому по теореме синусов: $\frac{AC}{\sin\angle ABC} = = \frac{AB}{\sin\alpha}$.



Таким образом, $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin\alpha}{\sin\angle ABC} > 1$.

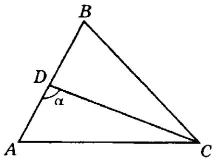
21. Если $\angle C$ — тупой, то в ΔABC AB — наибольшая сторона. Если построить ΔABX с вершиной X на стороне AC, то $\angle AXC$ оказывается более тупым, чем угол ACB: $\angle AXB > \angle ACB$. Где бы на отрезке AC точка X не находилась, всегда $\angle AXB > 90°$. Таким образом, в ΔAXB AB — наибольшая сторона, поэтому $BX < AB$.



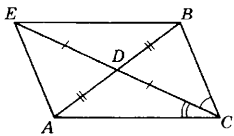


22. В предыдущей задаче доказано, что $BX < AB$ в связи с тем, что $\angle AXB > \angle ACB$. Аналогично докажем, что в ΔXYB $XY < XB$. Поскольку угол XYB больше угла ACB, то в этом треугольнике XB — наибольшая сторона, а поэтому $XY < XB < AB$, откуда $XY < AB$.

23. В случае, если бы отрезок DC был высотой треугольника и угол между ним и стороной AB составлял бы 90°, то этот отрезок был бы меньше обеих сторон, поскольку катет меньше гипотенузы в прямоугольном треугольнике. В любом случае этот угол или меньше, или больше 90°. Если $\alpha > 90°$ (как изображено на рисунке), то по теореме синусов $AC > CD$, если $\alpha < 90°$, тогда в ΔDBC $BC > CD$.



24. Продлим медиану дальше на сторону AB и получим параллелограмм $AEBC$. В параллелограмме $EA = BC$, $\angle BCD = \angle AED$ внутренние разносторонние при $BC \parallel AE$, секущая CE. В ΔACE по теореме синусов

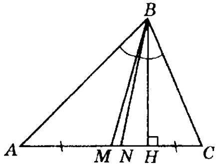


$\frac{AC}{\sin\angle AED} = \frac{AC}{\sin\angle ACD}$; $AE = BC$, $\angle AED = \angle BCD$;

$\frac{AC}{\sin\angle BCD} = \frac{BC}{\sin\angle ACD}$; $\frac{AC}{BC} = \frac{\sin\angle BCD}{\sin\angle ACD} > 1$,

$AC > BC$, так как синус возрастает, поэтому соответственно $\angle BCD > \angle ACD$.

25. Поскольку ΔNBH — прямоугольный, то $BN > BH$, так как гипотенуза больше, чем катет. По теореме Пифагора: в ΔNBH $NB = \sqrt{NH^2 + BH^2}$,



в $\triangle MBH$: $MB = \sqrt{(MN + NH)^2 + BH^2} =$

$= \sqrt{MN^2 + 2MN \cdot NH + NH^2 + BH^2} =$

$= \sqrt{MN^2 + 2MN \cdot NH + NB^2}$. Отсюда $BM^2 > BN^2$, то есть $BM > BN$. Таким образом, $BH < BN < BM$, что и требовалось доказать.

112. Решение треугольников

26. 1) $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 30° - 45° = 105°$.

По теореме синусов $\left(\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}\right)$, $b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 5 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\sin 105°} \approx 2{,}59$;

$c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = 5 \cdot 0{,}707/0{,}966 \approx 3{,}66$.

2) $\gamma = 180° - 60° - 75° = 45°$, $b = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\beta = \frac{20}{0{,}966} \cdot 0{,}866 \approx 17{,}93$.

$c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx \frac{20}{0{,}966} \cdot 0{,}707 \approx 14{,}64$.

3) $\alpha = 180° - 120° - 40° = 20°$. $b \approx \frac{35}{0{,}342} \cdot 0{,}643 \approx 65{,}8$.

$c \approx \frac{35}{0{,}342} \cdot 0{,}866 \approx 88{,}63$.

4) $\gamma = 180° - 36° - 25° = 119°$, $a = \frac{12}{0{,}423} \cdot 0{,}588 \approx 16{,}68$.

$c \approx \frac{12}{0{,}423} \cdot 0{,}875 \approx 24{,}82$.

5) $\gamma = 180° - 64° - 48° = 68°$, $a \approx \frac{14}{0{,}927} \cdot 0{,}899 \approx 13{,}58$.

$b = \frac{14}{0{,}927} \cdot 0{,}743 \approx 11{,}22$.

27. 1) Используем теорему косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$, тогда

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos 60°} = \sqrt{144 + 64 - 96} \approx 10{,}6$. По теореме синусов:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}\sin\gamma = \frac{12}{10{,}6} \cdot 0{,}87 \approx 0{,}981$. $\alpha \approx 79°$.

$\sin\beta = \sin\gamma \cdot \frac{b}{c} = \frac{0{,}87}{10{,}6} \cdot 8 \approx 0{,}66$, откуда $\beta \approx 41°$.

2) $c = \sqrt{49 + 520 + 2 \cdot 0{,}643 \cdot 161} \approx 28$.

По теореме синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$; $\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\gamma}{c}$;

$\sin\alpha \approx 0{,}1915$; $\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\gamma}{c}$; $\sin\beta = 0{,}6292$. Воспользовавшись микрокалькулятором или таблицей Брадиса, имеем: $\alpha \approx 11°$, $\beta \approx 39°$.

3) $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} = \sqrt{81 + 289 + 2 \cdot 153 \cdot 0{,}087} \approx 10{,}9$.

По теореме синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$; $\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a}$; $\sin\beta \approx 0{,}4504$; $\beta \approx 27°$.

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 95° - 27° = 58°.$

4) $a = \sqrt{196 + 100 + 2 \cdot 140 \cdot 0,819} \approx 22,9.$

$\sin\beta = \dfrac{b \cdot \sin\alpha}{a}$; $\sin\beta \approx 0,35$; $\beta \approx 21°$. $\gamma = 180° - 145° - 21° = 14°.$

5) $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta} = \sqrt{1024 + 529 + 2 \cdot 736 \cdot 0,882} \approx 53,4.$

$\sin\alpha = \dfrac{a \cdot \sin\beta}{b}$; $\sin\alpha \approx 0,281$; $\alpha \approx 16°$. $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 16° - 152° = 12°.$

6) $b \approx \sqrt{576 + 324 - 2 \cdot 24 \cdot 18 \cdot 0,966} \approx 8,09;$

$\sin\gamma = \dfrac{c \cdot \sin\beta}{b}$; $\sin\gamma \approx 0,5762$; $\beta \approx 35°$. $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 15° - 35° = 130°.$

28. 1) По теореме синусов:

$\sin\beta = \dfrac{b \cdot \sin\alpha}{a}$; $\sin\beta \approx 0,3608$; $\beta \approx 21°.$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 120° - 21 = 39°.$

По теореме синусов: $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}\sin\gamma = \dfrac{12}{0,4866} \cdot 0,629 \approx 8,72.$

2) $\sin\beta = \dfrac{b \cdot \sin\alpha}{a}$; $\sin\beta \approx 0,233$; $\beta \approx 13°.$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 138° - 13° = 29°$; $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}\sin\gamma \approx 27\dfrac{0,485}{0,669} \approx 19,6.$

3) $\sin\beta = \dfrac{b \cdot \sin\alpha}{a}$; $\sin\beta \approx 0,0974$; $\beta \approx 6°.$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 164° - 6° = 10°$; $c = a\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx 34 \cdot \dfrac{0,174}{0,276} \approx 21,4.$

4) $\sin\beta = \dfrac{b \cdot \sin\alpha}{a} = 1,732.$

Имеем, что $\sin\beta = 1,742 > 1$, что не имеет смысла, поэтому решений нет.

5) $\sin\beta = \dfrac{b \cdot \sin\alpha}{a} \approx 0,667$; $\beta = 42°$. Таким образом, в первом случае $\beta = 42°$ — острый угол, тогда обозначим тупой угол через β'.

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 30° - 42° = 108°$; $c = a\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx 6 \cdot 0,951 \approx 11,4;$

$\beta' = 180° - 42° = 138°.$

$\gamma' = 180° - \alpha - \beta' = 180° - 138° - 30° = 12°;$

$c = a\dfrac{\sin\gamma'}{\sin\alpha} = 2 \cdot 6 \cdot 0,208 \approx 2,49.$

29. Используем теорему косинусов:

1) $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{9 + 16 - 4}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 0,875.$ $\alpha = 29°.$

$\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{4 + 16 - 9}{2 \cdot 2 \cdot 4} \approx 0,6875.$ $\beta = 47°.$

$\gamma = 180° - 29° - 47° = 104°.$

2) $\cos\alpha = \dfrac{4 + 64 - 49}{2 \cdot 2 \cdot 8} \approx 0,59375$; $\alpha \approx 54°.$

$\cos\beta = \dfrac{49+64-4}{2\cdot 7\cdot 8} \approx 0,9732$; $\beta \approx 13°$. $\gamma = 180° - 54° - 13° = 113°$.

3) $\cos\alpha = \dfrac{25+49-16}{2\cdot 5\cdot 7} \approx 0,8285$; $\alpha \approx 34°$.

$\cos\beta = \dfrac{49+16-25}{2\cdot 7\cdot 4} \approx 0,6896$; $\beta \approx 44°$. $\gamma = 180° - 34° - 44° = 102°$.

4) $\cos\alpha = \dfrac{576+324-225}{2\cdot 24\cdot 18} \approx 0,7812$; $\alpha \approx 39°$.

$\cos\beta = \dfrac{225+324-576}{2\cdot 15\cdot 18} \approx -0,05$; $\beta \approx 93°$.

$\gamma = 180° - 39° - 93° = 48°$.

5) $\cos\alpha = \dfrac{289+1521-529}{2\cdot 17\cdot 39} \approx 0,966$; $\alpha \approx 15°$.

$\cos\beta = \dfrac{529+1521-289}{2\cdot 23\cdot 39} \approx 0,9816$; $\beta \approx 11°$. $\gamma = 180° - 15° - 11° = 154°$.

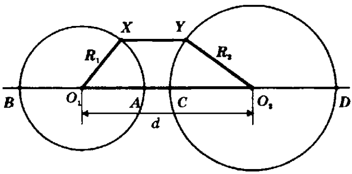
6) $\cos\alpha = \dfrac{441+1444-3025}{2\cdot 21\cdot 38} \approx 0,7142$; $\alpha \approx 136°$.

$\cos\beta = \dfrac{3025+1444-441}{2\cdot 38\cdot 55} \approx 0,9636$; $\beta \approx 15°$. $\gamma = 180° - 136° - 15° = 29°$.

§ 13. Многоугольники

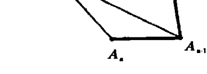
113. Ломаная

1. Для ломаной O_1XYO_2 по теореме 13.1 $O_1O_2 \le O_1X + XY + YO_2$, если обозначить $O_1X = R_1$, $O_2Y = R_2$, то $d \le R_1 + XY + R_2$. Отсюда $XY \ge d - R_1 - R_2$, а поскольку $AC = d - R_1 - R_2$, то наименьшее расстояние между точками окружностей равно $d - R_1 - R_2$. Для ломаной XO_1O_2Y по теореме 13.1 $XY \le R_1 + d + R_2$. Так как $BD = d + R_1 + R_2$, то наибольшее расстояние между точками окружностей равно $d + R_1 + R_2$.

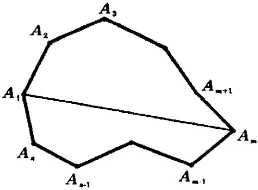


2. Для ломаной XO_1O_2Y по теореме 13.1 $XY \le XO_1 + O_1O_2 + O_2Y$, то есть $XY \le R_1 + d + R_2$. Так как $BC = R_1 + d + R_2$, то наибольшее расстояние между точками окружностей равно $d + R_1 + R_2$. Для ломаной O_1O_2YX $O_1X \le O_1O_2 + XY + O_2Y$ по теореме 13.1. Поскольку $O_1X = R_1$, $O_1O_2 = d$, $O_2Y = R_2$, то $R_1 \le d + XY + R_2$. Отсюда $XY \ge R_1 - d - R_2$, так как $CD = R_1 - d - R_2$, то наименьшее расстояние между точками окружностей равно $R_1 - d - R_2$.

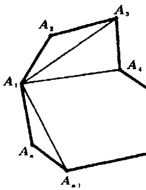
3. Допустим, что вершины ломаной $A_1A_2...A_n$ не лежат на одной прямой. Заменим звенья A_1A_2 и A_2A_3 одним звеном A_1A_3. Получим ломаную $A_1A_3A_4...A_n$. Из неравенства треугольника $A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3$, отсюда новая ломаная не длиннее, чем начальная. Теперь заменим звенья A_1A_3 и A_3A_4 на звено A_1A_4. Длина новой ломаной не больше, чем длина предыдущей $A_1A_3A_4...A_n$. Продолжим такие замены до тех пор, пока не получим треугольник $A_1A_{n-1}A_n$, у которого $A_1A_n < A_1A_{n-1} + A_{n-1}A_n$. Таким образом, $A_1A_n < A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots A_{n-1}A_n$, если вершины ломаной не лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.



4. Пусть $A_1A_2A_3...A_n$ — замкнутая ломаная и точка A_m делит ломаную $A_1A_2A_3...A_n$ на две ломаные $A_1A_2...A_m$ и $A_mA_{m+1}...A_1$, равные между собой по длине. В каждой из ломаных отрезок A_1A_m не длиннее, чем любая из ломаных (по теореме 13.1), а, значит, этот отрезок не больше половины длины замкнутой ломаной. А так как это расстояние наибольшее между вершинами в замкнутом многоугольнике, то любое другое расстояние в многоугольнике меньше вышеупомянутого и соответственно меньше полудлины ломаной, что и требовалось доказать.

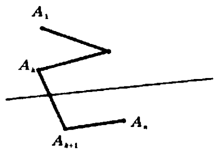


5. Рассмотрим произвольное звено в замкнутой ломаной $A_1A_2A_3...A_n$, например звено A_1A_n. Заменим звенья A_1A_2 и A_2A_3 на звено A_1A_3. Из неравенства треугольника $A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3$. Теперь заменим звенья A_1A_3 и A_3A_4 на новое звено A_1A_4. По неравенству треугольников $A_1A_4 < A_1A_3 + A_3A_4$, то есть $A_1A_4 < A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4$. Продолжим таким образом и получим из $\Delta A_1A_{n-1}A_n$: $A_1A_n < A_1A_{n-1} + A_nA_{n-1}$, то есть $A_1A_n < A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + ... + A_{n-1}A_n$. Так как звено A_1A_n выбрано произвольно, то длина каждого звена в замкнутом многоугольнике не больше суммы длин остальных звеньев, что и требовалось доказать.

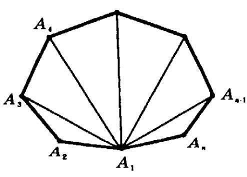


6. Замкнутая ломаная не может иметь звенья длиной 1 м, 2 м, 3 м, 4 м и 11 м, так как длина последнего звена превышает сумму длин остальных звеньев: $11 > 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, а в задаче № 5 доказано, что это невозможно в замкнутой ломаной.

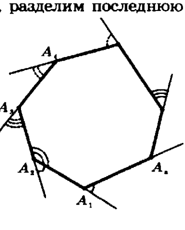
7. Согласно основному свойству размещения точек относительно прямой на плоскости прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Точки A_1, ..., A_k принадлежат одной полуплоскости, точки A_{k+1}, ..., A_n — второй. Чтобы объединить точки A_k и A_{k+1}, нужно звеном A_kA_{k+1} пересечь прямую, поскольку никаким иным способом, кроме пересечения, перейти прямую невозможно.



114. Выпуклые многоугольники



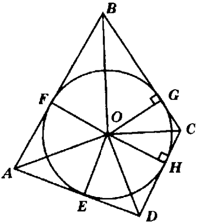
8. Рассмотрим выпуклый многоугольник $A_1A_2A_3...A_n$. Диагональ в многоугольнике — это отрезок, соединяющий несоседние вершины. То есть в n-угольнике в вершине A_1 сходятся $(n - 3)$ диагонали, где тройка учитывает две соседние вершины и вершину A_1. Просуммируем диагонали, сходящиеся во всех точках n-угольника, их всего $n(n - 3)$. Будем считать, что $A_1A_3 = A_3A_1$, $A_1A_4 = A_4A_1$, ..., $A_kA_l = A_lA_k$ (где $|k - l| > 1$), то есть между двумя точками существует только одна диагональ. Таким образом, чтобы избежать двойного просчета, разделим последнюю формулу на 2 , то есть имеем $\frac{n(n-3)}{2}$.



9. Сумма внутреннего угла и смежного с ним при каждой вершине многоугольника равна 180°, тогда сумма всех внешних и внутренних углов многоугольника равна $180° \cdot n$. По теореме 13.2 сумма всех внутренних углов равна $180°(n - 2)$. Таким образом, сумма внешних углов, взятых по одному при каждой вершине многоугольника, равна $180° \cdot n - 180°(n - 2) = 360°$.

10. Сумма внутренних углов четырехугольника $180°(4 - 2) = 360°$. Обозначим через α наименьший угол в четырехугольнике, тогда 2α — угол, пропорциональный числу 2, 3α — пропорциональный числу 3, 4α — пропорциональный числу 4. Сумма этих углов равна 360°, то есть $\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 360°$, $10\alpha = 360°$, отсюда $\alpha = 36°$, $2\alpha = 72°$, $3\alpha = 108°$, $4\alpha = 144°$.

11. Впишем окружность в произвольный четырехугольник $ABCD$. Если из одной точки к окружности проведены две касательные, то отрезки касательных равны:



$AF = AE = a$; $BF = BG = b$; $CG = CH = c$; $DH = DE = d$. Тогда:
$AB = AF + BF = a + b$; $CD = DH + CH = c + d$;
$AD = AE + DE = a + d$.
$BC = BG + CG = b + c$.
Получим:
$AB + CD = AD + BC$; $a + b + c + d = a + d + b + c$, то есть суммы длин противоположных сторон четырехугольника, описанного вокруг окружности, равны, что и требовалось доказать.

115. Правильные многоугольники

12. Пусть α — внутренний угол правильного многоугольника. Тогда сумма углов в многоугольнике равна $n \cdot \alpha$, где n — количество сторон многоугольника. По теореме 13.2 сумма внутренних углов многоугольника равна $180°(n - 2)$, откуда имеем уравнение:

$$180°(n - 2) = n\alpha,\ n(180° - \alpha) = 360°,\ n = \frac{360°}{180° - \alpha}.$$

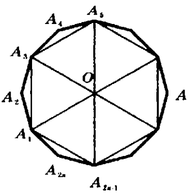
В первом случае $n_1 = \dfrac{360°}{180° - 135°} = \dfrac{360°}{45°} = 8$;

во втором — $n_2 = \dfrac{360°}{180° - 150°} = \dfrac{360°}{30°} = 12$.

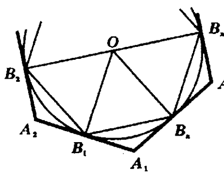
13. В задаче 9 этого параграфа доказано, что сумма внешних углов, взятых по одному при каждой вершине многоугольника, равна 360°. Таким образом, если α — внешний угол многоугольника с n сторонами, то $n\alpha = 360°$, $n = \dfrac{360°}{\alpha}$. Поэтому

1) $n = \dfrac{360°}{36°} = 10$; 2) $n = \dfrac{360°}{24°} = 15$.

14. Пусть $A_1A_2A_3...A_{2n}$ — правильный $2n$-угольник, тогда его стороны $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., A_{2n}A_1$ равны, расстояния между центром O и вершинами A тоже равны: $OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_n = ... = OA_k = ... = OA_{2n}$, соответственно равны между собой и $180°(2n - 2) = 360°(n - 1)$ внутренних углов. Соединим через одну вершины $2n$-угольника и получим n-угольник $A_1A_3A_5...A_{2n-3}A_{2n-1}$. Этот многоугольник имеет равные между собой стороны $A_1A_3 = A_3A_5 = ... = A_{2n-3} = A_{2n-1}$, поскольку треугольники $A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_5$, ..., $A_{2n-3}A_{2n-2}A_{2n-1}$, $A_{2n-1}A_{2n}A_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Из этого следует, что треугольники OA_1A_3, OA_3A_5, ..., $OA_{2n-1}A_1$ равны по трем сторонам, так как две другие стороны этих треугольников OA_1, OA_3, OA_5, ..., OA_{2n-1} равны как радиусы вписанной в треугольник $A_1A_2A_3...A_{2n}$ окружности. Тогда имеем, что углы при вершинах многоугольника $A_1A_3A_5...A_{2n-1}$ равны, так как состоят из двух одинаковых углов каждый, а если в многоугольнике стороны и внутренние углы равны, то он является правильным.



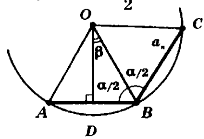
15. Впишем в правильный многоугольник $A_1A_2...A_n$ окружность. Потом соединим середины соседних сторон многоугольника $A_1A_2...A_n$ друг с другом и получим вписанный в окружность многоугольник $B_1B_2...B_n$. Стороны этого многоугольника равны: $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = ... = B_{n-1}B_n = B_nB_1$, поскольку треугольники $A_1B_1B_n$, $A_2B_2B_1$, ..., $A_nB_nB_{n-1}$ равны по двум сторонам и углу между ними (так как это половины сторон правильного многоугольника и внутренний угол). Треугольники B_1B_2O, ..., $B_{n-1}B_nO$, B_nB_lO равны по трем сторонам ($OB_1 = OB_2 = ... OB_n$ как радиусы описанной окружности), а из того, что они равнобедренные, следует, что углы при вершинах B_1, B_2, ..., B_n треугольников равны. Поэтому углы при вершинах многоугольника $B_1B_2...B_n$ равны, так как состоят из равных между собой углов. Таким образом, в многоугольнике $B_1B_2...B_n$ стороны и внутренние углы равны между собой, то есть он правильный.



116. Формулы для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников

16. Внутренний угол при вершине n-угольника равен

$\alpha = 180°\dfrac{(n-2)}{n} = 180°\left(1-\dfrac{2}{n}\right)$. В треугольнике OBD $\beta = 180° - 90° - \dfrac{\alpha}{2} = 90° - \dfrac{180°}{2}\left(1-\dfrac{2}{n}\right) = \dfrac{180°}{n}$.



$$R = OB = \frac{DB}{\sin\beta} = \frac{a_n}{2}\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{180°}{n}} \Rightarrow a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}.$$

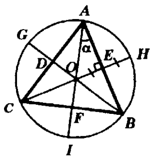
$$r = OD = \frac{DB}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{a_n}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}} \Rightarrow a_n = 2r\operatorname{tg}\frac{180°}{n}.$$

$n = 3$: $a_3 = 2R\sin 60° = R\sqrt{3}$; $a_3 = 2r\operatorname{tg}60° = 2r\sqrt{3}$;

$n = 4$: $a_4 = 2R\sin 45° = R\sqrt{2}$; $a_4 = 2r\operatorname{tg}45° = 2r$;

$n = 6$: $a_6 = 2R\sin 30° = R$; $a_6 = 2r\operatorname{tg}30° = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$.

17. Пусть данный треугольник вписан в окружность. Обозначим $AB = a_3$, $OB = R$.



Известно, что $a_3 = R\sqrt{3}$. Так как $OK = KM$, $OK = \dfrac{R}{2}$, $OM \perp AB$, то ΔOKB — прямоугольный, по теореме Пифагора:

$$OB^2 = OK^2 + KB^2; KB = \sqrt{OB^2 - OK^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Известно, что если радиус перпендикулярен хорде, то он проходит через ее середину:

$AB = 2KB = 2\cdot R\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$, что и требовалось доказать.

18. Воспользуемся для сторон правильного многоугольника известными формулами о радиусах вписанной и описанной окружности: $a_n = 2R\sin\dfrac{180°}{n}$, $a_n = 2r\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}$, отсюда $r = R\cos\dfrac{180°}{n}$. В треугольнике $n = 3$: $r = R\cos 60° = \dfrac{R}{2}$.

19. Выражения для сторон правильных m- и n-угольников через радиус окружности, в которую они вписаны, имеют такой вид: $a_m = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{m}$, $a_n = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$. Разделив одно уравнение на другое, получим: $\dfrac{a_m}{a_n} = \dfrac{\sin\dfrac{180^\circ}{m}}{\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$, откуда $a_m = \dfrac{a_n}{\sin\dfrac{180^\circ}{n}} \cdot \sin\dfrac{180^\circ}{m}$. Если $n = 3$, $m = 4$, то $a_4 = \dfrac{a_3}{\sin 60^\circ} \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{\dfrac{2}{3}}a_3$.

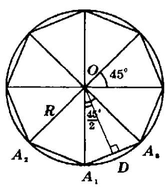
20. Формула для длины стороны правильного n-угольника через радиус описанной вокруг него окружности: $a_n = 2R_3\sin\dfrac{180^\circ}{n}$. Если на стороне правильного треугольника построить квадрат, то $a_3 = a_4$. Тогда $2R_3\sin\dfrac{180^\circ}{3} = 2R_4\sin\dfrac{180^\circ}{4}$, откуда $R_4 = R_3\dfrac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = R_3\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Таким образом, $R_4 = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \cdot 4$ дм $= 2\sqrt{6}$ (дм).

21. Формула для определения стороны правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R: $a_n = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$. Учитывая, что $D = 2R$, имеем:

$a_n = D\sin\dfrac{180^\circ}{n} \Rightarrow a_4 = 4$ см $\sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$ (см).

22. В предыдущей задаче определена связь между длиной стороны правильного n-угольника и диаметром описанной вокруг него окружности: $a_n = D\sin\dfrac{180^\circ}{n}$, откуда для $n = 3$ имеем: $a_3 = 2$ см $\cdot \sin 60^\circ = 2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ см $= \sqrt{3}$ (см).

23. Построим $A_1A_2...A_8$ — правильный 8-угольник с радиусом R. Соединим вершины 8-угольника с центром окружности. Получим 8 равнобедренных треугольников $A_1OA_2, ..., A_8OA_1$. В ΔA_1OA_8: $\angle A_1OA_8 = \dfrac{300}{8} = 45^\circ$. Используем теорему косинусов:

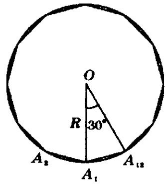


$A_1A_8 = \sqrt{OA_1^2 + OA_8^2 - 2OA_1 \cdot OA_8\cos\angle A_1OA_8} =$

$= \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{R^2 \cdot (2 - \sqrt{2})} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$;

$a_8 = R \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

24. Формула для определения стороны правильного n-угольника, вписанного в окружность: $a_n = 2R\sin\dfrac{360^\circ}{n}$.

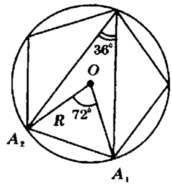


Тогда для правильного 12-угольника

$$a_{12} = 2R\sin 15^\circ = 2R\sin\frac{30^\circ}{2} = 2R\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} =$$

$$= R\sqrt{2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}\,.$$

25. Формула для определения стороны вписанного в окружность n-угольника



$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$, откуда:

$a_5 = 2R\sin 36^\circ \approx 1{,}176R$,

$a_{10} = 2R\sin 18^\circ \approx 0{,}618R$.

Найдем $\sin 18^\circ$ точнее. Используем тождество

$\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$.

$\sin(2\cdot 18^\circ) = \cos(3\cdot 18^\circ)$;

$2\sin 18^\circ\cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ$.

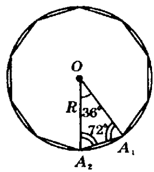
Сократим на $\cos 18^\circ$, так как $\cos 18^\circ \neq 0$.

$2\sin 18^\circ = 4\cos^2 18^\circ - 3$

или $4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0$.

$D = 4 + 16 = 20$, $\sqrt{D} = 2\sqrt{5}$;

$\sin 18^\circ = \dfrac{-2 \mp 2\sqrt{5}}{8} = \dfrac{-1 \mp \sqrt{5}}{4}$.



Поскольку в первом квадранте $\sin 18^\circ > 0$, то $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, откуда

$$a_{10} = 2R\frac{\sqrt{5}-1}{4} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618R.$$

$$a_5 = 2R\sin 36^\circ = 2R\sin(2\cdot 18^\circ) = 4R\sin 18^\circ\cos 18^\circ = 4R\sin 18^\circ\sqrt{1-\sin^2 18^\circ} =$$

$$= R\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{1-\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{16}} = \frac{R\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}\cdot\sqrt{16-5+2\sqrt{5}-1} =$$

$$= \frac{R\left(\sqrt{5}-1\right)}{2\cdot 2}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}} = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{5}R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} =$$

$$= \sqrt{5}R\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{5-1}{4}} = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \approx 1{,}176R.$$

26. Зависимость длины стороны правильного n-угольника от радиуса вписанной в него и описанной вокруг него окружностей передается формулами:

$a = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$, $a = 2r\,\mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$, откуда $r = \dfrac{a}{2}\,\mathrm{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}$. $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$\cos\alpha = \mathrm{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha$; $\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \mathrm{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha$; $\mathrm{ctg}\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1}$; учитывая, что

$\sin\dfrac{180^\circ}{n} = \dfrac{a}{2R}$, имеем: $r = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{180^\circ}{n}}-1} = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{4R^2}{a^2}-1} = \sqrt{R^2-\dfrac{a^2}{4}}$.

27. Формула радиуса окружности, описанной вокруг правильного n-угольника:

$$R = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{180^\circ}{n}}\,.\quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha = \sin\alpha;\ \cos^2\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\alpha = \sin^2\alpha;$$

$$(1 - \sin^2\alpha)\mathrm{tg}^2\alpha = \sin^2\alpha;\ \mathrm{tg}^2\alpha = \sin^2\alpha(1 + \mathrm{tg}^2\alpha);\ \sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}\,.$$

Учитывая, что $\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n} = \frac{a}{2R}$, имеем:

$$R = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\frac{180^\circ}{n}}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}} = \frac{a}{2}\sqrt{1+\frac{a^2}{4r^2}}\cdot\frac{2r}{a} = r\sqrt{1+\frac{a^2}{4r^2}} = \sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}\,.$$

28. Если для многоугольника со стороной a окружность является описанной, то для многоугольника со стороной b — вписанной, поэтому $a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$, $b = 2R\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$. Воспользуемся формулой, полученной в предыдущей задаче:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\,.\ \text{Тогда } b = 2R\frac{\sin\frac{180^\circ}{n}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{180^\circ}{n}}} = 2R\frac{\frac{a}{2R}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{4R^2}}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{4R^2-a^2}{4R^2}}} =$$

$$= \frac{2aR}{\sqrt{4R^2-a^2}}\,.$$

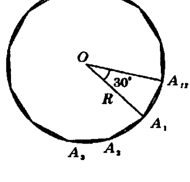
29. Для многоугольника со стороной a окружность является описанной, а для многоугольника со стороной b — вписанной, откуда $a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$, $b = 2R\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

Учитывая, что $\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$, имеем: $a = 2R\frac{\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\frac{180^\circ}{n}}} = 2R\frac{\frac{b}{2R}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{4R^2}}} =$

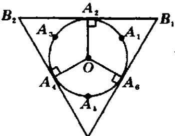
$$= \frac{b}{\sqrt{\frac{4R^2+b^2}{4R^2}}} = \frac{2bR}{\sqrt{4R^2+b^2}}\,.$$

117. Построение некоторых правильных многоугольников

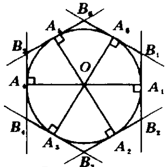
30. Сначала находим центральный угол 12-угольника, который опирается на его сторону: $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Построим его. Расстояние между точками, где окружность пересекает стороны центрального угла, является стороной двенадцатиугольника. Из точки A_2 как из центра радиусом, равным половине радиуса окружности, делаем засечку и получаем вершину A_3. Аналогично строим другие вершины 12-угольника $A_4, A_5, \ldots, A_n$ и соединяем их отрезками.



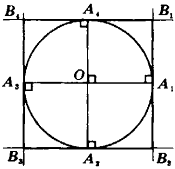
31. Построим окружность с центром в точке O (рис. а). Возьмем на окружности произвольную точку. Из нее как из центра радиусом, равным радиусу окружности, делаем засечку. Получим точку A_2. Аналогично из точки A_2 делаем засечку A_3 и так далее: A_4, A_5, A_6. К трем точкам A_2, A_4, A_6 проведем радиусы окружности, а к ним — касательные к окружности. Точки пересечения этих касательных и будут вершинами правильного треугольника, описанного около окружности. Сделаем на окружности шесть засечек и получим точки: A_1, A_2,..., A_6 (рис. б). Проведем к каждой из них радиусы и перпендикулярно к радиусам — касательные к окружности. Точки пересечения двух соседних касательных будут вершинами шестиугольника. Проведем через центр окружности два перпендикулярных друг другу диаметра (рис. в). В точках, где диаметры касаются окружности, проведем касательные, перпендикулярные диаметрам. Точки пересечения касательных являются вершинами квадрата. Проведем через центр окружности четыре диаметра так, чтобы угол между двумя соседними диаметрами составлял 45° (рис. г). В точках, где диаметры касаются окружности, построим касательные к окружности. Точки пересечения двух соседних касательных будут вершинами правильного восьмиугольника.



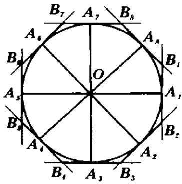
а



б



в



г

118. Подобие правильных выпуклых многоугольников

32. Для первого правильного n-угольника $a_n = 2R_1 \sin\dfrac{180^\circ}{n}$, $a_n = 2r_1 \operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$, откуда $\dfrac{R_1}{r_1} = \cos\dfrac{180^\circ}{n}$. Для второго правильного n-угольника отношение радиуса описанной окружности к радиусу вписанной окружности такое же: $\dfrac{R_2}{r_2} = \cos\dfrac{180^\circ}{n}$. Имеем $\dfrac{R_1}{r_1} = \dfrac{R_2}{r_2}$, откуда $R_2 = \dfrac{R_1}{r_1} r_2$.

33. Периметры правильных n-угольников можно выразить через длины их сторон как $p_1 = na_1$ и $p_2 = na_2$, а радиусы вписанных и описанных вокруг них окружностей соответственно $R_1 = \dfrac{a_1}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$, $R_2 = \dfrac{a_2}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$, $r_1 = \dfrac{a_1}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$ и $r_2 = \dfrac{a_2}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$.

Поэтому $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{a_1}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}} \cdot \dfrac{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}{a_2} = \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{na_1}{na_2} = \dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{a}{b}$.

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}} \cdot \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}{a_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{na_1}{na_2} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{a}{b}.$$

119. Длина окружности

34. Длина окружности равна $l = 2\pi r$, поэтому $l_1 = 2\pi \cdot 10$ м $= 6{,}28 \cdot 10$ м $= 62{,}8$ (м). $l_2 = 2\pi \cdot 15$ м $= 6{,}28 \cdot 15$ м $= 94{,}2$ (м).

35. Если R_1 — начальный радиус окружности, а ΔR — величина, указывающая, насколько изменился радиус, то новый радиус равен $R_2 = R_1 + \Delta R$, откуда $\Delta l = l_2 - l_1 = 2\pi R_2 - 2\pi R_1 = 2\pi(R_1 + \Delta R) - 2\pi R_1 = 2\pi\Delta R = 2\pi \cdot 1$ мм $\simeq 6{,}28$ мм.

36. Имеем правильный 8-угольник, вписанный в окружность радиуса R. Тогда длина стороны равна $a_8 = 2R\sin\dfrac{180°}{8} = D\sin 22{,}5° = D \cdot 0{,}383$. Периметр 8-угольника равен $p_8 = 8 \cdot a_8 \simeq 3{,}06D$. Отношение периметра 8-угольника к диаметру описанной около него окружности равно $\dfrac{p_8}{D} = \dfrac{3{,}06D}{D} = 3{,}06$.

37. Длина стороны в правильном 12-угольнике $a_{12} = 2R\sin\dfrac{180°}{12} = D\sin 15° \simeq$ $\simeq 0{,}259D$. Периметр относительно $p_{12} = 12 \cdot a_{12} = 12 \cdot 0{,}259D \simeq 3{,}11D$. Отношение периметра правильного 12-угольника к диаметру описанной вокруг него окружности составляет $\dfrac{p_{12}}{D} = \dfrac{3{,}11D}{D} = 3{,}11$.

38. Если один метр составляет одну 40-миллионную часть длины экватора, то длина экватора $l = 40\,000\,000 \cdot 1$ м $= 40\,000\,000$ (м). Из формулы для длины окружности радиуса R имеем $R = \dfrac{l}{2\pi}$. Таким образом, радиус Земли $R = \dfrac{40\,000\,000}{2 \cdot 3{,}1416}$ м $\simeq$ $\simeq 6\,366{,}2$ (км).

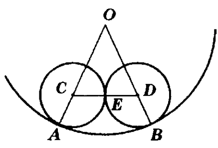
39. Радиус земного шара до увеличения составлял R_1 километров, после увеличения — $R_2 = R_1 + \Delta R$ километров. В соответствии с этим длина земного экватора составляла l_1 и l_2 километров. При увеличении она изменилась на $l_2 - l_1 =$ $= 2\pi R_2 - 2\pi R_1 = 2\pi R_1 + 2\pi\Delta R - 2\pi R_1 = 2\pi\Delta R = 2\pi \cdot 1$ см $\simeq 6{,}28$ (см).

40. Если в окружность радиуса R вписаны n равных окружностей, касающихся друг друга и данной окружности, то центры этих окружностей являются вершинами правильного n-угольника, сторона которого равна удвоенному радиусу этих окружностей. Если мы опишем этот n-угольник окружностью радиуса $R_k = OD = R - R_n$, то сторона n-угольника будет равна

$a_n = 2R_k\sin\dfrac{180°}{n}$. Но $a_n = 2R_n$, поэтому $2R_n = 2R_k\sin\dfrac{180°}{n}$; $R_n = (R - R_n)\sin\dfrac{180°}{n}$;

$$R_n + R_n\sin\frac{180°}{n} = R\sin\frac{180°}{n}.$$

$$R_n\left(1 + \sin\frac{180°}{n}\right) = R\sin\frac{180°}{n};\quad R_n = R\frac{\sin\frac{180°}{n}}{1 + \sin\frac{180°}{n}}.$$



Таким образом, для трех вписанных окружностей:

$$R_3 = R\frac{\sin 60^\circ}{1+\sin 60^\circ} = R\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = R\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}};$$

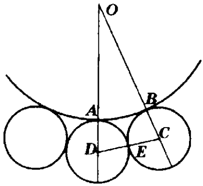
для четырех вписанных окружностей:

$$R_4 = R\frac{\sin 45^\circ}{1+\sin 45^\circ} = R\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = R\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = R\frac{1}{\sqrt{2}+1};$$

для шести вписанных окружностей:

$$R_6 = R\frac{\sin 30^\circ}{1+\sin 30^\circ} = R\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = R\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}R.$$

41. Пусть около окружности радиуса R описано n равных окружностей радиуса R_n, касающихся друг друга и данной окружности. Тогда центры этих окружностей образуют вершины правильного n-угольника со стороной $a_n = 2R_n$. С другой стороны, если описать этот правильный n-угольник окружностью радиуса $R_k = R + R_n$, то сторона n-угольника будет составлять $a_n = 2R_k \sin\frac{180^\circ}{n}$. То есть $2R_n = 2(R + R_n)\sin\frac{180^\circ}{n}$; $R_n = (R + R_n)\sin\frac{180^\circ}{n}$; $R_n - R_n\sin\frac{180^\circ}{n} = R\sin\frac{180^\circ}{n}$;



$R_n\left(1-\sin\frac{180^\circ}{n}\right) = R\sin\frac{180^\circ}{n}$; $R_n = R\frac{\sin\frac{180^\circ}{n}}{1-\sin\frac{180^\circ}{n}}$. Откуда для $n = 3$:

$$R_3 = R\frac{\sin 60^\circ}{1-\sin 60^\circ} = R\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = R\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = R\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} =$$

$$= R\frac{\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)}{4-3} = R\left(3+2\sqrt{3}\right).$$

Для $n = 4$:

$$R_4 = R\frac{\sin 45^\circ}{1-\sin 45^\circ} = R\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = R\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = R\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = R\frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}{4-2} =$$

$$= R\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Для $n = 6$:

$$R_6 = R\frac{\sin 30^\circ}{1-\sin 30^\circ} = R\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = R\frac{1}{2-1} = R.$$

120. Радианная мера угла

42. За каждый оборот точка на ободе шкива проходит расстояние πD, где D — диаметр шкива. Если за минуту шкив сделает 80 оборотов, то точка на ободе пройдет 80 раз длину окружности, образующей шкив. Таким образом, линейная скорость точки на ободе составляет $\upsilon = \pi \cdot 1{,}4 \text{ м} \cdot 80 \dfrac{1}{\text{мин}} \approx 351{,}9$ м/мин.

43. Воспользуемся соответствующей формулой $\alpha_{\text{рад}} = \dfrac{\pi}{180^\circ}\alpha_{\text{град}}$:

1) $30^\circ \cdot \dfrac{\pi}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{6}$; 2) $45^\circ \cdot \dfrac{\pi}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{4}$; 3) $120^\circ \cdot \dfrac{\pi}{180^\circ} = \dfrac{2}{3}\pi$; 4) $270^\circ \cdot \dfrac{\pi}{180^\circ} = \dfrac{3}{2}\pi$, откуда длина дуги окружности с радиусом 1 см составляет:

1) $l_1 = \dfrac{\pi}{6}$ см; 2) $l_2 = \dfrac{\pi}{4}$ см;

3) $l_3 = \dfrac{2}{3}\pi$ см; 4) $l_4 = \dfrac{3}{2}\pi$ см.

44. Если дуга, соответствующая центральному углу, составляет n-ю часть окружности, то соответствующий ей угол в радианах равен:

$$\frac{l}{l_{\text{круга}}} = \frac{\alpha_{\text{рад}} \cdot R}{2\pi R} = \frac{\alpha_{\text{рад}}}{2\pi} = \frac{1}{n} \Rightarrow \alpha_{\text{рад}} = \frac{2\pi}{n} \text{ радиан.}$$

Поэтому центральный угол содержит $\alpha_{\text{град}} = \dfrac{180^\circ}{\pi}$, $\alpha_{\text{рад}} = \dfrac{180^\circ}{\pi} \cdot \dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{360^\circ}{n}$ градусов.

Таким образом, для:

1) $n = 3$, $\alpha_{\text{град}} = \dfrac{360^\circ}{3} = 120^\circ$; 2) $n = 4$, $\alpha_{\text{град}} = \dfrac{360^\circ}{4} = 90^\circ$;

3) $n = 5$, $\alpha_{\text{град}} = \dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$; 4) $n = 6$, $\alpha_{\text{град}} = \dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$;

5) $n = \dfrac{3}{2}$, $\alpha_{\text{град}} = \dfrac{360^\circ}{3}2 = 240^\circ$; 6) $n = \dfrac{4}{3}$, $\alpha_{\text{град}} = \dfrac{360^\circ}{4}3 = 270^\circ$.

45. Длина дуги угла $l = \alpha_{\text{рад}} \cdot R$, откуда $\alpha_{\text{рад}} = \dfrac{l}{R}$, или в градусах

$\alpha_{\text{град}} = \dfrac{180^\circ}{\pi}\alpha_{\text{рад}} = \dfrac{180^\circ}{\pi} \cdot \dfrac{l}{R} = \dfrac{180^\circ}{\pi} \cdot \dfrac{1\text{км}}{6370\text{км}} \approx 0{,}00899^\circ$, или в секундах: $\alpha_{\text{сек}} = \dfrac{3600''}{1^\circ}\alpha_{\text{град}} \approx 32''$.

46. $l = \alpha_{\text{рад}} \cdot R$. Но $\alpha_{\text{рад}} = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha_{\text{град}}$, откуда $l = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot R\,\alpha_{\text{град}}$.

1) $l_1 = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot 1 \text{ м} \cdot 45^\circ = \dfrac{\pi}{4}$ м $\approx 0{,}70$ (м);

2) $l_2 = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot 1\text{ м} \cdot 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}\text{ м} \simeq 0{,}52$ (м);

3) $l_3 = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot 1\text{ м} \cdot 120^\circ = \dfrac{2}{3}\pi\text{ м} \simeq 2{,}09$ (м).

4) $l_4 = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot 1\text{ м} \cdot 45^\circ 45' = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot 45\dfrac{45^\circ}{60}\text{ м} = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot 45{,}75^\circ \simeq 0{,}80$ (м);

5) $l_5 = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot 1\text{ м} \cdot 60^\circ 30' = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot 60\dfrac{30^\circ}{60}\text{ м} = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot 60{,}5^\circ \simeq 1{,}06$ (м);

6) $l_6 = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot 1\text{ м} \cdot 150^\circ 36' = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot 150\dfrac{36^\circ}{60}\text{ м} = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot 150{,}6^\circ \simeq 2{,}63$ (м).

47. Поскольку всем трем углам соответствуют правильные многоугольники, а именно: шестиугольник $\left(\dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ\right)$, квадрат $\left(\dfrac{360^\circ}{4} = 90^\circ\right)$ и треугольник $\left(\dfrac{360^\circ}{3} = 120^\circ\right)$, то можно воспользоваться формулой для стороны правильного n-угольника и радиуса описанной около него окружности: $a_n = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$, откуда $R = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$.

По радиусу окружности, описанной около правильного многоугольника, найдем длину дуги, которую отсекает его сторона:

$l = \alpha_{\text{рад}} R = \dfrac{\pi}{180^\circ}\alpha_{\text{град}} R = \dfrac{\pi}{180^\circ}\alpha_{\text{град}} \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$. Таким образом, для:

1) $n = 6$: $l_6 = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot 60^\circ \cdot \dfrac{a_6}{2\sin 30^\circ} = \dfrac{\pi a_6}{3}$;

2) $n = 4$: $l_4 = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot 90^\circ \cdot \dfrac{a_4}{2\sin 45^\circ} = \dfrac{\pi a_4}{4\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\pi a_4}{2\sqrt{2}}$;

3) $n = 3$: $l_3 = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot 120^\circ \cdot \dfrac{a_3}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\pi a_3}{2\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\pi a_3}{3\sqrt{3}}$.

48. Хорды, которым соответствуют дуги с градусной мерой в 60°, 90° и 120°, являются сторонами правильных шестиугольника, квадрата и треугольника, вписанных в окружность. Для их сторон $a_n = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$. Воспользуемся выражением $n = \dfrac{360^\circ}{\alpha_{n_{\text{град}}}}$ и запишем: $a_n = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{360^\circ}\alpha_{n_{\text{град}}} = 2R\sin\dfrac{\alpha_{n_{\text{град}}}}{2}$.

С другой стороны, радиус окружности, частью которого является дуга, равен $R = \dfrac{l}{\alpha_{\text{рад}}} = \dfrac{180^\circ}{\pi} \cdot \dfrac{l}{\alpha_{\text{град}}}$. Тогда хорда, соответствующая длине дуги l и углу $\alpha_{n_{\text{град}}}$, равна: $a_n = 2 \cdot \dfrac{180^\circ}{\pi} \cdot \dfrac{l}{\alpha_{n_{\text{град}}}} \cdot \sin\dfrac{\alpha_{n_{\text{град}}}}{2} = \dfrac{360^\circ}{\pi} \cdot l \cdot \dfrac{\sin\dfrac{\alpha_{n_{\text{град}}}}{2}}{\alpha_{n_{\text{град}}}}$.

Откуда:

1) $n = 6$: $a_6 = \dfrac{360°}{\pi}\cdot l\cdot\dfrac{\sin 30°}{60°} = \dfrac{6}{\pi}l\dfrac{1}{2} = \dfrac{3l}{\pi}$;

2) $n = 4$: $a_4 = \dfrac{360°}{\pi}\cdot l\cdot\dfrac{\sin 45°}{90°} = \dfrac{4l}{\pi}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}l}{\pi}$;

3) $n = 3$: $a_3 = \dfrac{360°}{\pi}\cdot l\cdot\dfrac{\sin 60°}{120°} = \dfrac{3l}{\pi}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}l}{2\pi}$.

49. Воспользовавшись формулой

$\alpha_{рад} = \dfrac{\pi}{180°}\alpha_{град}$, определим:

1) $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{180°}\cdot 30° = \dfrac{\pi}{6}$; 2) $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{180°}\cdot 45° = \dfrac{\pi}{4}$; 3) $\alpha_3 = \dfrac{\pi}{180°}\cdot 60° = \dfrac{\pi}{3}$.

50. $\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 60° - 45° = 75°$.

$\angle A_{рад} = \dfrac{\pi}{180°}\cdot\angle A_{град} = \dfrac{\pi}{180°}\cdot 60° = \dfrac{\pi}{3}$; $\angle B_{рад} = \dfrac{\pi}{180°}\cdot\angle B_{град} = \dfrac{\pi}{180°}\cdot 45° = \dfrac{\pi}{4}$;

$\angle C_{рад} = \dfrac{\pi}{180°}\cdot\angle C_{град} = \dfrac{\pi}{180°}\cdot 75° = \dfrac{5}{12}\pi$.

51. $\alpha_{град} = \dfrac{180°}{\pi}\cdot\alpha_{рад}$, тогда:

1) $\alpha_{1_{град}} = \dfrac{180°}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{180°}{2} = 90°$; 2) $\alpha_{2_{град}} = \dfrac{180°}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{180°}{4} = 45°$;

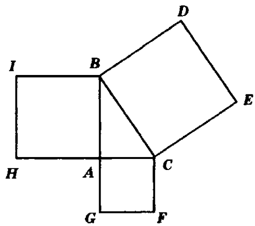
3) $\alpha_{3_{град}} = \dfrac{180°}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{180°}{8} = 22{,}5°$; 4) $\alpha_{4_{град}} = \dfrac{180°}{\pi}\cdot\dfrac{5\pi}{6} = 180°\cdot\dfrac{5}{6} = 150°$;

5) $\alpha_{5_{град}} = \dfrac{180°}{\pi}\cdot\dfrac{7\pi}{18} = 180°\cdot\dfrac{7}{18} = 70°$; 6) $\alpha_{6_{град}} = \dfrac{180°}{\pi}\cdot\dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{4}{3}\cdot 180° = 240°$.

§ 14. Площади фигур

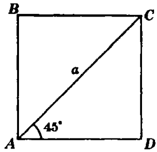
121. Понятие площади

1. По теореме Пифагора сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы: $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Площадь квадрата $ABIH$ равна $S_{ABIH} = AB^2$, площадь квадрата $ACFG$ составляет $S_{ACFG} = AC^2$, а площадь квадрата $BCED$, соответственно, $S_{BCED} = BC^2$. Таким образом, $S_{ABIH} + S_{ACFG} = S_{BCED}$.



2. Равновеликим двум данным участкам квадратной формы будет участок, имеющий площадь, равную сумме площадей этих двух участков, откуда сторона этого участка составит $\sqrt{100^2 + 150^2} =$

$= \sqrt{10\,000 + 22500} = \sqrt{32\,500} \approx 180{,}3$ (м).



3. Сторона квадрата по его диагонали: $AD = a\cos45° = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

откуда его площадь: $S_{ABCD} = AD^2 = a^2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

4. Длина стороны квадрата, вписанного в окружность радиуса R, равна $a_{впис} = 2R\sin45°$, а площадь соответственно $S_{впис} = a^2_{впис} = 4R^2\sin^2 45° = 4R^2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2R^2$. Для описанного вокруг этой же окружности квадрата длина его стороны составляет $a_{опис} = 2R\text{tg}45° = 2R$, а соответствующая площадь $S_{опис} = a^2_{опис} = 4R^2$. Отсюда $\dfrac{S_{опис}}{S_{впис}} = \dfrac{4R^2}{2R^2} = 2$. Таким образом, площадь описанного около окружности квадрата больше, чем площадь вписанного в эту окружность квадрата, в 2 раза.

5. Уменьшив каждую из сторон квадрата a в три раза, получим новый квадрат со сторонами $\dfrac{a}{3}$. Его площадь будет в девять раз меньше, чем площадь начального квадрата: $S(a) = a^2 \Rightarrow \dfrac{S(a)}{S\left(\dfrac{a}{3}\right)} = \dfrac{a^2}{\dfrac{a^2}{9}} = 9$.

6. Если S_1 — площадь квадрата со стороной a_1, а $S_2 = \dfrac{S_1}{25}$ — площадь квадрата со стороной a_2, то имеем: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} = \sqrt{\dfrac{S_1 25}{S_1}} = 5$, то есть при уменьшении площади квадрата в 25 раз его сторона уменьшится в 5 раз.

122. Площадь прямоугольника

7. Составим систему двух уравнений, обозначив через a, b стороны прямоугольника, которые нам нужно найти, откуда $\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{9}; \\ ab = 144 \end{cases}$, тогда $a = \dfrac{4}{9}b$, $ab = \dfrac{4}{9}b^2 = 144$.

$b^2 = 144 \cdot \dfrac{9}{4} = 324$,откуда $b = 18$ м. А поскольку $a = \dfrac{4}{9}b$, то $a = 8$ (м).

8. Имеем уравнение для периметра прямоугольника $P = 2(a + b) = 74$ дм, соответствующая площадь: $S = ab = 3\text{ м}^2 = 300\text{ дм}^2$.

Отсюда $a = \dfrac{74}{2} - b = 37 - b$ и $a \cdot b = (37 - b)b = 37b - b^2 = 300$.

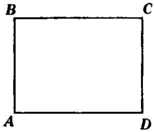
$b^2 - 37b + 300 = 0$.

$D = \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} = \sqrt{37^2 - 4 \cdot 300} = \sqrt{1369 - 1200} = 13$.

$b_1 = \dfrac{37-13}{2} = \dfrac{24}{2} = 12$ (дм); $b_2 = \dfrac{37+13}{2} = \dfrac{50}{2} = 25$ (дм).

Соответственно $a_1 = 37 - 12$ дм $= 25$ (дм) и $a_2 = 37 - 25$ дм $= 12$ (дм), то есть стороны прямоугольника равны 12 дм и 25 дм.

123. Площадь параллелограмма

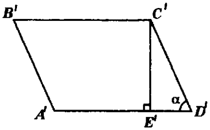


9. Площадь прямоугольника $S_{ABCD} = AB \cdot BC = AD \cdot CD$.

Площадь параллелограмма по определению равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне:

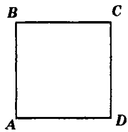
$S_{A'B'C'D'} = A'D' \cdot C'E'$.

Из $\triangle E'C'D'$: $C'E' = C'D' \sin\alpha$, то есть $S_{A'B'C'D'} = A'D' \cdot C'D' \sin\alpha$.



По условию площадь прямоугольника в два раза больше площади параллелограмма, тогда

$\dfrac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}} = 2 = \dfrac{AD \cdot CD}{A'D' \cdot C'D' \sin\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, то есть $\alpha = 30^\circ$.

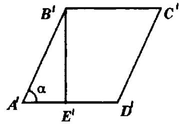


10. Площадь квадрата $S_{ABCD} = AB \cdot AD$.

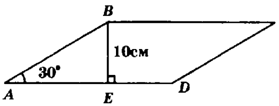
Площадь ромба $S_{A'B'C'D'} = A'D' \cdot B'E' = A'D' \cdot A'B' \sin\alpha$.

Если $AB = A'B'$ и $AD = A'D'$, то площадь ромба меньше площади квадрата, поскольку синус острого угла всегда меньше единицы.

Поэтому $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}} = \dfrac{AB \cdot AD}{AB' \cdot AD' \cdot \sin\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha} > 1$.



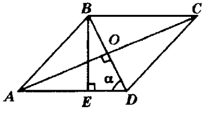
11. Определим сторону ромба из треугольника ABE:



$AB = \dfrac{BE}{\sin 30^\circ} = \dfrac{BE}{\frac{1}{2}} = 2BE = AD$.

$S_{ABCD} = BE \cdot AD = 2BE \cdot BE = 2BE^2 = 2 \cdot 100$ см^2 $=$
$= 200$ (см^2).

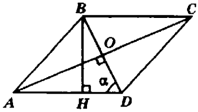
12. В равнобедренном треугольнике ABD (в ромбе $AD = AB$) проведем высоту AO. Поскольку в этом треугольнике $\sin\alpha = \dfrac{EB}{BD}$, то в прямоугольном треугольнике AOD



$$AD = \frac{OD}{\cos\alpha} = \frac{BD}{2\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{BD}{2\sqrt{1-\frac{EB^2}{BD^2}}}.$$

Таким образом, площадь ромба $S_{ABCD} = AD \cdot BE = \dfrac{BE \cdot BD}{2\sqrt{1-\frac{BE^2}{BD^2}}} = 202{,}8$ (см^2).

13. Площадь ромба равна произведению стороны и высоты, проведенной к ней: $S_{ABCD} = BH \cdot AD$. В прямоугольном треугольнике BHD $BH = BD \cdot \sin\alpha$. В прямоугольном треугольнике AOD:



$AD = \dfrac{AO}{\sin\alpha} = \dfrac{AC}{2\sin\alpha}$, поэтому имеем:

$S_{ABCD} = BD \cdot \sin\alpha \cdot \dfrac{AC}{2\sin\alpha} = \dfrac{1}{2}BD \cdot AC.$

14. AB — сторона ромба. Обозначим через a меньшую диагональ ромба, а через b — большую диагональ. Отсюда $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2}$. Площадь ромба равна половине произведения диагоналей: $S = \dfrac{1}{2}ab = 12$. Рассмотрим систему двух уравнений:

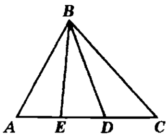
$\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2}ab = 144; \end{cases}$ $a = \dfrac{b}{2}$, поэтому $\dfrac{b^2}{4} = 12$. $b^2 = 48; b = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$; $a = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$

Дигонали ромба пересекаются под прямым углом и в точке пересечения делятся пополам. По теореме Пифагора:

$AB = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12+3} = \sqrt{15}.$

124. Площадь треугольника

15. Пусть все стороны и углы в ΔABC известны. Необходимо найти отрезки AE, ED и DC, концы которых являются вершинами равновеликих треугольников ABE, EBD и DBC.



Из того, что эти треугольники равновелики, следует, что

$S_{ABE} = S_{EBD} = S_{DBC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.$

$S_{ABE} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AE \sin\angle BAE,$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \sin\angle BAC$, откуда

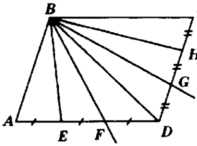
$\dfrac{1}{2}AB \cdot AE \sin\angle BAE = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \sin\angle BAC$. Отсюда $AE = \dfrac{1}{3}AC$.

Поскольку $S_{BCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}$ и $S_{BCD} = \dfrac{1}{2}BC \cdot CD \sin\angle BCD$ и $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC \cdot AC \times$ $\times \sin\angle BCA$, то $\dfrac{1}{2}BC \cdot CD \cdot \sin\angle BCD = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}BC \cdot AC \sin\angle BCA.$

Отсюда $CD = \dfrac{1}{3}AC$. Таким образом, $ED = AC - AE - CD = AC - \dfrac{1}{3}AC - \dfrac{1}{3}AC =$ $= \dfrac{1}{3}AC$, то есть одну из сторон треугольника нужно разделить на три равные части и провести из противоположной к этой стороне вершины треугольника отрезки, которые соединяются с концами этих частей.

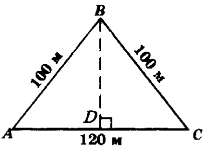
16. Сначала разделим данный параллелограмм на два равных треугольника $\Delta ABD =$ $= \Delta BDC$ (BD — общая сторона, $AB = CD$, $BC = AD$), то есть $S_{ABD} = S_{BCD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.

Потом разделим оба треугольника на три равновеликих треугольника каждый, проведя из вершины B параллелограмма прямые к концам трех равных отрезков на AD и на DC. В предыдущей задаче доказано, что $S_{ABE} = S_{EBF} = S_{FBD} = \dfrac{1}{3}S_{ABD}$ и



$S_{DBG} = S_{GBH} = S_{HBC} = \frac{1}{3} S_{DBC}$. Но $S_{ABD} = S_{DBC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$, то есть получим шесть равновеликих треугольников. Отсюда $S_{ABF} = S_{FBGD} = S_{GBC} = \frac{1}{3} S_{ABCD}$. Таким образом, прямые BF и BG делят данный параллелограмм на три равные части.

17. Проведем высоту BD. По теореме Пифагора катет BD в прямоугольном треугольнике ABD равен:

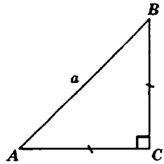


$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{AB^2 - \frac{AC^2}{4}}, \text{ откуда}$$

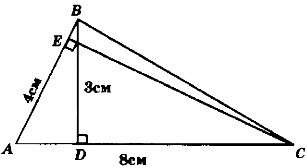
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} AC \sqrt{AB^2 - \frac{AC^2}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 120 \text{ м} \cdot \sqrt{100^2 \text{м}^2 - 60^2 \text{м}^2} = 60 \text{ м} \cdot 80 \text{ м} = 4\,800 \text{ м}^2.$$

18. ΔABC — прямоугольный и равнобедренный, поэтому углы между гипотенузой и катетами равны $45°$. Тогда $AC = BC = AB\cos 45° = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Площадь этого треугольника равна половине квадрата со стороной $\frac{a}{\sqrt{2}}$, поэтому $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$.



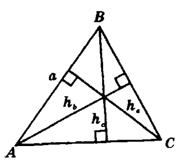
19. Площадь треугольника ABC через сторону AC и высоту BD, проведенную к ней, равна: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

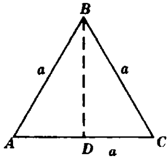


С другой стороны, площадь треугольника равна половине произведения стороны AB и проведенной к ней высоты EC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot EC, \text{ откуда } \frac{1}{2} AB \cdot EC = \frac{1}{2} AC \cdot BD, \text{ и } EC = \frac{AC}{AB} \cdot BD = \frac{8 \text{ см}}{4 \text{ см}} \cdot 3 \text{ см} = 6 \text{ (см)}.$$

20. Пусть a, b, c — стороны треугольника ABC, а h_a, h_b, h_c — соответствующие высоты, проведенные к сторонам a, b, c. Площадь треугольника можно определить тремя способами: через a и h_a — $S_{ABC} = \frac{1}{2} ah_a$, через b и h_b — $S_{ABC} = \frac{1}{2} bh_b$ и через c и h_c — $S_{ABC} = \frac{1}{2} ch_c$. Отсюда $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$. $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$; $a : b = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b}$, поэтому $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$.





21. Сначала найдем высоту BD из треугольника ABD:

$BD = AB \cdot \sin\angle BAD = a\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, откуда

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

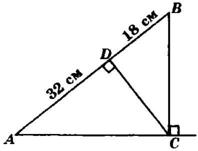
22. Найдем длину стороны правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса R:

$a = 2R\sin\frac{180^\circ}{3} = 2R\sin 60^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

По результатам предыдущей задачи имеем:

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(R\sqrt{3}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

23. В ΔDBC $BC = \frac{DB}{\cos\angle DBC}$. В ΔABC $BC = AB \cdot \cos\angle DBC$.



Поэтому $\frac{DB}{\cos\angle DBC} = AB \cdot \cos\angle DBC$, и $\cos\angle DBC = \sqrt{\frac{DB}{AB}} = \sqrt{\frac{DB}{AD+DB}}$. Найдем высоту DC.

В ΔDBC $DC = BC \cdot \sin\angle DBC = BC\sqrt{1-\cos^2\angle DBC} =$

$= \frac{DB}{\cos\angle DBC}\sqrt{1-\cos^2\angle DBC} = DB\sqrt{\frac{1}{\cos^2\angle DBC}-1} = DB\sqrt{\frac{AD+DB}{DB}-1} =$

$= DB\sqrt{\frac{AD}{DB}+1-1} = DB\sqrt{\frac{AD}{DB}} = \sqrt{AD \cdot DB}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot DC = \frac{AD+DB}{2}\sqrt{DB \cdot AD} = \frac{32+18}{2}$ см $\sqrt{32\text{ см} \cdot 18\text{ см}} = 600$ (см²).

24. Обозначим через a и b катеты прямоугольного треугольника. $S_\Delta = \frac{1}{2}ab$.

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = 73^2$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}ab = 1\,320\\ a^2+b^2 = 5\,329\end{cases} \begin{cases}ab = 2\,640\\ a^2+b^2 = 5\,329\end{cases} \begin{cases}a = \frac{2\,640}{b}\\ \left(\frac{2\,640}{6}\right)^2 + b^2 = 5\,329\end{cases} \quad \frac{6\,969\,600}{b^2} + b^2 = 5\,329$$

$b^4 - 5\,329b^2 + 6\,969\,600 = 0$. Сделаем замену: $b^2 = m$.

$m^2 - 5\,329m + 6\,969\,600 = 0$.

$D = b^2 - 4ac = (-5329)^2 - 4 \cdot 6\,969\,600 = 721^2$.

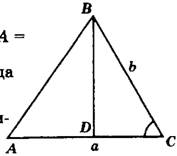
$m_1 = 3025$, $b_1 = \pm 55$; $m_2 = 2304$, $b_2 = \pm 48$.

По условию задачи $b > 0$.

I случай: $b_1 = \pm 55$; $a_1 = \frac{2640}{55} = 48$.

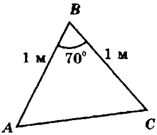
II случай: $b_2 = \pm 48$; $a_2 = \frac{2640}{48} = 55$.

Таким образом, катеты равны 48 см и 55 см.

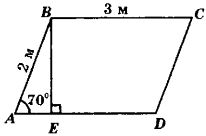


25. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}a \cdot BD$. Для ΔBDC $BD = BC \cdot \sin\angle BCA =$ $= b\sin(a\hat{}b)$, где $(a\hat{}b)$ — угол между сторонами a и b. Откуда $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot b\sin(a\hat{}b)$. Площадь треугольника будет наибольшей, если синус угла $c = (a\hat{}b)$ является наибольшим, то есть синус будет равен единице, а это возможно, если угол C будет равен 90°.

26. Площадь треугольника вычислим по двум сторонам и углу между ними:

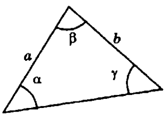


$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{2}\sin 70° \approx 0{,}47\ (\text{м}^2).$$



27. Найдем высоту параллелограмма, проведенную к большей стороне: $BE = AB\sin\angle BAE$. Площадь параллелограмма равна произведению стороны и проведенной к ней высоты: $S_{ABCD} = AD \cdot BE = AD \cdot AB \cdot$ $\cdot \sin\angle BAE = 6 \cdot \sin 70° \approx 6 \cdot 0{,}94 = 5{,}64$ (м²).

28. $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - (\alpha + \beta)$.



По теореме синусов найдем сторону b:

$$\frac{a}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\alpha},\ \text{поэтому}\ b = a\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Воспользовавшись формулой $\sin\gamma = \sin(180° - (\alpha + \beta)) =$ $= \sin(\alpha + \beta)$, имеем:

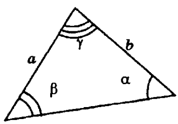
$b = a\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Таким образом, площадь данного треугольника равна:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}a^2.$$

125. Формула Герона для площади треугольника

29. Площадь треугольника можно найти по формуле

$$S = \frac{1}{2}a \cdot b\sin\gamma.$$



По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ найдем $\cos\gamma$:

$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, откуда найдем $\sin\gamma$.

Поскольку $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1 - \cos\gamma) \cdot (1 + \cos\gamma) =$

$$= \left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \cdot \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) = \frac{(2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2)}{4a^2b^2} =$$

$$= \frac{\left(c^2 - (a-b)^2\right)}{4a^2b^2}\left((a+b)^2 - c^2\right) = \frac{(c - (a-b))(c + (a-b))((a+b) - c)((a+b) + c)}{4a^2b^2} =$$

$= \frac{1}{4a^2b^2}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c) =$

$= \frac{1}{4a^2b^2}\left((a+b+c)-2a\right)\left((a+b+c)-2b\right)\left((a+b+c)-2c\right)(a+b+c) =$

$= \frac{1}{4a^2b^2}(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)2p = \frac{16}{4a^2b^2}(p-a)(p-b)(p-c)p =$

$= \frac{4}{a^2b^2}(p-a)(p-b)(p-c)p.$

Имеем: $\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Таким образом, площадь треугольника $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

30. По формуле Герона:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника.

1) $S_1 = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21\cdot8\cdot7\cdot6} = \sqrt{7\cdot3\cdot4\cdot4\cdot7\cdot3} = 84.$

2) $S_2 = \sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)} = \sqrt{8\cdot3\cdot3\cdot2} = \sqrt{4\cdot3\cdot3\cdot2} = 4\cdot3 = 12.$

3) $S_3 = \sqrt{81(81-17)(81-65)(81-80)} = 9\sqrt{64\cdot16\cdot1} = 9\cdot32 = 288.$

4) $S_4 = \sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-\frac{25}{6}\right)\left(\frac{15}{2}-\frac{29}{6}\right)\left(\frac{15}{2}-6\right)} = \sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{45-25}{6}\cdot\frac{45-29}{6}\cdot\frac{3}{2}} =$

$= \frac{1}{12}\sqrt{3\cdot5\cdot20\cdot16\cdot3} = \frac{12}{12}\sqrt{20\cdot5} = 10.$

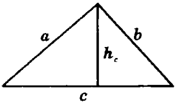
5) $S_5 = \sqrt{49(49-13)\left(49-37\frac{12}{13}\right)\left(49-47\frac{1}{13}\right)} = 7\cdot6\sqrt{11\frac{1}{12}\cdot1\frac{12}{13}} =$

$= \frac{42}{13}\sqrt{144\cdot25} = \frac{2520}{13}.$

6) $S_6 = \sqrt{\frac{15}{4}\left(3\frac{3}{4}-2\frac{1}{12}\right)\left(3\frac{3}{4}-3\frac{44}{75}\right)\left(3\frac{3}{4}-1\frac{83}{100}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{15\cdot\frac{20}{12}\cdot\frac{49}{300}\cdot\frac{192}{100}} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{49}{100}\cdot\frac{192}{100}} = \frac{35}{200}\sqrt{\frac{192}{3}} = \frac{35}{200}\sqrt{64} = \frac{35}{200}\cdot8 = \frac{35}{25} = \frac{7}{5} = 1{,}4.$

31. Площадь треугольника по формуле Герона:



$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника.

С другой стороны, площадь треугольника равна половине произведения стороны на высоту, проведенную к этой стороне:

$S = \frac{1}{2}ch_c$. Отсюда $\frac{1}{2}ch_c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; откуда имеем

$h_c = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}.$

32. По результатам предыдущей задачи: $h_c = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$,

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника, откуда в первом случае:

$$h_{c_1} = \frac{2\sqrt{40(40-25)(40-30)(40-25)}}{25} = \frac{2}{25}\sqrt{40\cdot 15\cdot 10\cdot 15} = 24 \text{ (см)};$$

во втором:

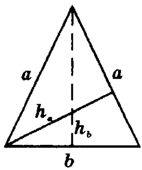
$$h_{c_2} = \frac{2\sqrt{33(33-30)(33-25)(33-11)}}{11} = \frac{2}{11}\sqrt{11\cdot 3\cdot 3\cdot 8\cdot 2\cdot 11} = 24 \text{ (см)}.$$

33. Обозначим через a боковую сторону равнобедренного треугольника, через b — его основу. По условию $a = b + 11$ см, а $P = 2a + b$, где P — периметр треугольника. Определим стороны:

$P = 64$ см $= 2(b + 11$ см$) + b$, откуда

64 см $= 2b + 22$ см $+ b$, $b = \dfrac{64-22}{3} = 14$ (см).

Имеем: $a = 14$ см $+ 11$ см $= 25$ (см).



По формуле Герона площадь треугольника

$$S = \sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}-a\right)^2\left(\frac{P}{2}-b\right)} = \left(\frac{P}{2}-a\right)\sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}-b\right)}.$$

С другой стороны, площадь треугольника равна половине произведения стороны и проведенной к ней высоты: $S = \dfrac{1}{2}h_a a = \left(\dfrac{P}{2}-a\right)\sqrt{\dfrac{P}{2}\left(\dfrac{P}{2}-b\right)}$, значит:

$$h_a = \frac{2}{a}\left(\frac{P}{2}-a\right)\sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}-b\right)} = \frac{2(32-25)}{25}\sqrt{32(32-14)} = \frac{2\cdot 7\cdot 8\cdot 3}{25} = 13{,}44 \text{ (см)}.$$

34. Вычислим полупериметр $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{13+14+15}{2}$ см $= 21$ (см). Разность площадей, найденных по произведению сторон треугольника и высот, к ним проведенных, и по формуле Герона имеем тождество:

$$\frac{1}{2}h_a a = \frac{1}{2}h_b b = \frac{1}{2}h_c c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ откуда}$$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{13}\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} =$$

$$= \frac{2}{13}\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = \frac{2}{13}\cdot 7\cdot 4\cdot 3 = \frac{2\cdot 84}{13} = \frac{168}{13} \text{ (см)};$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{14}\cdot 84 = 12 \text{ (см)};$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{15}\cdot 84 = 11{,}2 \text{ (см)}.$$

35. По формуле Герона вычислим площадь треугольника:

$$S=\sqrt{\frac{2\frac{1}{12}+3\frac{44}{75}+1,83}{2}\cdot\left(\frac{2\frac{1}{12}+3\frac{44}{75}+1,83}{2}-2\frac{1}{12}\right)\times}$$

$$\overline{\times\left(\frac{2\frac{1}{12}+3\frac{44}{75}+1,83}{2}-3\frac{44}{75}\right)\left(\frac{2\frac{1}{2}+3\frac{44}{75}+1,82}{2}-1,83\right)}=$$

$$=\sqrt{3\frac{3}{4}\left(3\frac{3}{4}-2\frac{1}{12}\right)\left(3\frac{3}{4}-3\frac{44}{75}\right)\left(3\frac{3}{4}-1\frac{83}{100}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{15\left(\frac{20}{12}\right)\left(\frac{225-176}{300}\right)\cdot 1,92}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{49}{100}\cdot\frac{192}{100}}=\frac{35}{200}\sqrt{\frac{192}{3}}=\frac{35}{200}\sqrt{64}=\frac{35}{200}\cdot 8=\frac{35}{25}=\frac{7}{5}=1,4.$$

Учитывая, что, с другой стороны, $\frac{1}{2}h_a a=S\Rightarrow h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2\cdot 1,4}{2\frac{1}{12}}=\frac{2,8}{25}\cdot 12=1,344.$

36. Сначала по формуле Герона найдем площади треугольников. Потом найдем наименьшие высоты первых двух треугольников, поделив их площади на наибольшие стороны и наибольшие высоты последних двух треугольников, поделив их площади на наименьшие стороны, поскольку $h_a=\frac{2S}{a}$, то есть чем больше сторона треугольника, тем меньше высота, к ней проведенная, и наоборот.

1) $p=\frac{5+5+6}{2}=\frac{16}{2}=8;\ S=\sqrt{8(8-6)(8-5)^2}=3\sqrt{8\cdot 2}=12;$

$h_c=2\cdot\frac{12}{6}=2\cdot 2=4.$

2) $p=\frac{17+65+80}{2}=\frac{162}{2}=81;\ S=\sqrt{81(81-17)(81-65)(81-80)}=$

$=9\sqrt{64\cdot 16}=9\cdot 32=288;\ h_c=2\cdot\frac{288}{80}=3,6\cdot 2=7,2.$

3) $p=\frac{1}{2}\left(\frac{25}{6}+\frac{29}{6}+\frac{36}{6}\right)=\frac{1}{12}90=\frac{15}{2};\ S=\sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-\frac{25}{6}\right)\left(\frac{15}{2}-\frac{29}{6}\right)\left(\frac{15}{2}-6\right)}=$

$=\sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{20}{6}\cdot\frac{16}{6}\cdot\frac{3}{2}}=\frac{1}{12}\sqrt{3\cdot 5\cdot 4\cdot 5\cdot 16\cdot 3}=10;\ h_a=\frac{2\cdot 10}{\frac{25}{6}}=\frac{120}{25}=4,8.$

4) $p=\frac{1}{2}\left(13+37\frac{12}{13}+47\frac{1}{13}\right)=\frac{98}{2}=49;$

$S=\sqrt{49(49-13)\left(49-37\frac{12}{13}\right)\left(49-47\frac{1}{13}\right)}=7\sqrt{36\cdot 11\frac{1}{3}\cdot 1\frac{12}{13}}=\frac{42}{13}\sqrt{144\cdot 25}=$

$=\frac{42\cdot 5\cdot 12}{13}=\frac{2520}{13};\ h_a=\frac{2\cdot 2520}{13}\cdot\frac{1}{13}=\frac{5040}{169}.$

126. Площадь трапеции

37. Построим $BF = CE$ — высоты трапеции. $AF + ED = AD - BC = 60 - 20 = 40$.

Если $AF = x$, то $ED = 40 - x$. Из прямоугольного ΔABF

$BF^2 = AB^2 - AF^2 = 37^2 - x^2$.

Из прямоугольного ΔCED имеем:

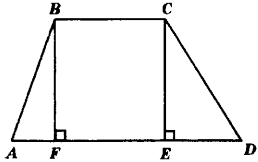
$CE^2 = CD^2 - ED^2 = 13^2 - (40 - x)^2$.

Составим уравнение:

$37^2 - x^2 = 13^2 - (40 - x)^2$.

$x = 35$. $AF = 35$ (см). $FD = 40 - 35 = 5$ (см).

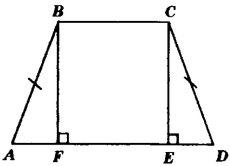
$CE^2 = 169 - 25 = 144$, $CE = 12$.



$$S_{тр} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CE,$$

Таким образом, $S_{тр} = \frac{60 + 2}{2} \cdot 12 = 480$ (см^2).

38. Имеем в равносторонней трапеции $AF = ED$, поскольку треугольники ABF и ECD равны по гипотенузе ($AB = CD$) и катету ($BF = CE$) как прямоугольные. Тогда



$2AF + FE = 2AF + BC = AD$, то есть $AF = \frac{AD - BC}{2}$.

Высота трапеции соответственно:

$BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24$ (см).

Таким образом, площадь трапеции

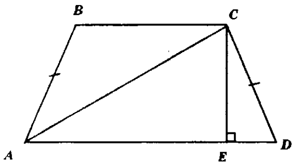
$$S = \frac{1}{2}(AD + BC)BF = 17 \cdot 24 \text{ см}^2 = 408 \text{ (см}^2\text{)}.$$

39. Рассмотрим ΔACE: $CE^2 = AC^2 - AE^2 = AC^2 - (AD - ED)^2$.

В ΔCDE: $CE^2 = CD^2 - ED^2$.

То есть $CD^2 - ED^2 = AC^2 - (AD - ED)^2 =$

$= AC^2 - AD^2 + 2AD \cdot ED - ED^2$.



$$ED = \frac{CD^2 - AC^2 + AD^2}{2AD} =$$

$$= \frac{289 - 1521 + 1936}{2 \cdot 44} = \frac{704}{88} = 8 \text{ (м)}.$$

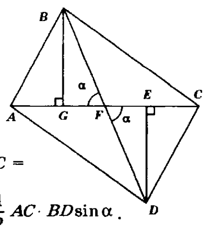
$CE = \sqrt{CD^2 - ED^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15$ (м).

По условию трапеция равносторонняя, поэтому $BC = AD - 2ED = 44 - 16 = 28$ (м).

Таким образом, площадь трапеции

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot CE = \frac{44 + 28}{2} \cdot 15 = 540 \text{ (м}^2\text{)}.$$

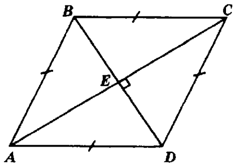
40. Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник, диагонали которого пересекаются. Его площадь состоит из суммы площадей треугольников ABC и ACD: $S_{ABCD} =$



$$S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot BG + \frac{1}{2} AC \cdot ED = \frac{1}{2}(BG + ED) \cdot AC =$$

$$= \frac{1}{2} AC(BF \sin\alpha + FD \sin\alpha) = \frac{1}{2} AC(BF + FD)\sin\alpha = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\alpha.$$

41. В предыдущей задаче доказано, что площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

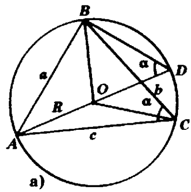


Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = BC$), в нем $\angle BAC = \angle BCA$. Он равен треугольнику ACD (AC — общая сторона, $AB = BC = CD = AD$), то есть $\angle DAC = \angle DCA = \angle BAC = \angle BCA$. Отсюда следует, что AE — биссектриса в равнобедренном ΔABD. Но биссектриса в равнобедренном треугольнике является также медианой и высотой. То есть $\angle BEA = 90°$. Тогда площадь ромба $S_р$ $= \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin 90° = \frac{1}{2}AC \cdot BD$. В произвольном параллелограмме угол между диагоналями $\angle BEA \neq 90°$, то есть $\sin\angle BEA < 1$ и площадь $S_{пар} = \frac{1}{2}AC \cdot BD\sin\angle BEA$. Имеем:

$$\frac{S_р}{S_{пар}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AC \cdot BD}{\frac{1}{2}AC \cdot BD\sin\angle BEA} = \frac{1}{\sin\angle BEA} > 1.$$ Таким образом, $S_р > S_{пар}$.

127. Формулы для радиусов вписанной и описанной в треугольник окружности

42. Если одной из сторон треугольника, вписанного в окружность, является диаметр этой окружности, то этот треугольник прямоугольный (рис. а), откуда $2R = \frac{a}{\sin\alpha}$; $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$. Умножим и разделим правую часть последнего выражения на bc:

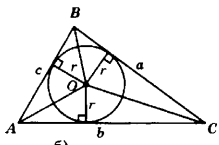


а)

$$R = \frac{abc}{2bc\sin\alpha} = \frac{abc}{4S},$$ так как $\frac{1}{2}bc\sin\alpha = S$.

Площадь ΔABC равна сумме площадей треугольников AOB, BOC, COA (рис. б).

Так как радиус вписанной окружности в каждом из этих треугольников



б)

является высотой, то $S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{r}{2}(a + b + c)$. Таким образом, имеем: $r = \frac{2S}{a+b+c}$.

43. По формуле Герона найдем площади треугольников, а потом радиусы описанной и вписанной в треугольник окружности:

1) $p = \frac{13+14+15}{2} = 21$; $S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84$; $R = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}$; $r = \frac{2 \cdot 84}{13+14+15} = 4$;

2) $p = \frac{15+13+4}{2} = 16$; $S = \sqrt{16(16-15)(16-13)(16-4)} = 4\sqrt{36} = 24$; $R = \frac{15 \cdot 13 \cdot 14}{4 \cdot 24} = \frac{65}{8}$; $r = \frac{2 \cdot 24}{15+13+4} = \frac{3}{2}$;

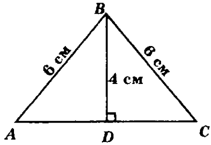
3) $p = \frac{35+29+8}{2} = 36$; $S = \sqrt{36(36-35)(36-29)(36-8)} = 6\sqrt{7 \cdot 28} = 6 \cdot 7 \cdot 2 = 84$; $R = \frac{29 \cdot 8 \cdot 35}{4 \cdot 84} = \frac{8120}{336} = \frac{145}{6}$;

$$r = \frac{2 \cdot 84}{35+29+8} = \frac{84}{36} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3};$$

4) $p = \dfrac{4+5+7}{2} = 8$; $S = \sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)} = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3} = 4\sqrt{6}$;

$$R = \frac{4 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 4\sqrt{6}} = \frac{35}{4\sqrt{6}};\quad r = \frac{2 \cdot 4\sqrt{6}}{4+5+7} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

44. Рассмотрим ΔABD: $AD = \dfrac{1}{2}AC = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{36-16} = \sqrt{20} = 4\sqrt{5}$ (см).



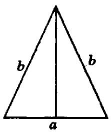
Отсюда $AC = 8\sqrt{5}$ (см).

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{8\sqrt{5}}{2} \cdot 4 = 16\sqrt{5}\ (\text{см})^2.$$

Таким образом, $R = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 8\sqrt{5}}{4 \cdot 16\sqrt{5}} = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$ (см).

45. Сначала найдем полупериметр: $p = \dfrac{2b+a}{2}$, потом площадь треугольника:

$$S = \sqrt{\frac{2b+a}{2}\left(b+\frac{a}{2}-a\right)\left(b+\frac{a}{2}-b\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{\left(b+\frac{a}{2}\right)\left(b-\frac{a}{2}\right)} = \frac{a}{2}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}.$$



$$R = \frac{ab^2}{4\frac{a}{2}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}} = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}.$$

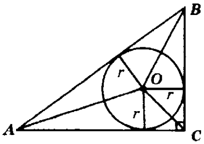
$$r = \frac{2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}}{2b+a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2b+a} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}.$$

46. Воспользовавшись результатами предыдущей задачи, имеем:

$$R = \frac{13^2\ \text{см}}{\sqrt{4 \cdot 13^2 - 100}} = \frac{169\,\text{см}}{\sqrt{4 \cdot 169 - 100}} = \frac{169\,\text{см}}{\sqrt{596}} = \frac{169}{24}\ (\text{см});$$

$$r = \frac{10}{2}\sqrt{\frac{2 \cdot 13 - 10}{2 \cdot 13 + 10}}\ \text{см} = 5\sqrt{\frac{16}{36}}\ \text{см} = 5 \cdot \frac{2}{3}\ \text{см} = \frac{10}{3}\ \text{см} = 3\frac{1}{3}\ (\text{см}).$$

47. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, откуда $S = \dfrac{1}{2}AC \cdot BC$. С другой стороны, она равна сумме площадей трех треугольников AOB, BOC, COA, в которых радиус вписанной окружности является высотой: $S = \dfrac{1}{2}AC \cdot r + \dfrac{1}{2}BC \cdot r + \dfrac{1}{2}AB \cdot r$, откуда $AC \cdot BC = r(AC + BC + AB)$. Умножим и разделим левую часть



уравнения на 2: $\dfrac{2AC \cdot BC}{2} = r(AC + BC + AB)$. Потом сложим и вычтем из числителя левой части уравнения $AC^2 + BC^2$:

$$\frac{1}{2}(AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot BC - (AC^2 + BC^2)) = \frac{1}{2}(AC + BC)^2 - (AC^2 + BC^2) =$$

$= r(AC + BC + AB)$. Поскольку треугольник прямоугольный, то $AC^2 + BC^2 = AB^2$, то есть $\frac{1}{2}\left((AC+BC)^2 - AB^2\right) = r\left((AC+BC)+AB\right)$, откуда имеем:

$$r = \frac{1}{2}\cdot\frac{(AC+BC)^2 - AB^2}{(AC+BC)+AB} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left((AC+BC)+AB\right)\left((AC+BC)-AB\right)}{(AC+BC)+AB} =$$

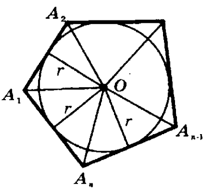
$$= \frac{1}{2}\left((AC+BC)-AB\right).$$

48. Если AC, BC — катеты прямоугольного треугольника, то его гипотенуза равна: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{40^2 + 42^2}$ см $= \sqrt{1600+1764}$ см $= \sqrt{3364}$ см $= 58$ (см),

откуда $R = \frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S} = \frac{40\cdot 42\cdot 58}{4\cdot\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 42}$ см $= \frac{58}{2}$ см $= 29$ (см).

$$r = \frac{2S}{AB+BC+AC} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 42}{40+42+58}\text{ см} = \frac{40\cdot 42}{140}\text{ см} = \frac{1680}{140}\text{ см} = 12\text{ (см)}.$$

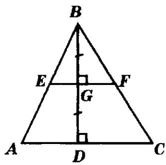
49. Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — произвольный многоугольник, описанный около окружности радиуса r. Его площадь состоит из суммы площадей n треугольников



$A_1OA_2, \ldots, A_{n-1}OA_n$, A_nOA_1: $S_n = S_{A_1OA_2} + \ldots + \ldots S_{A_{n-1}OA_n} + S_{A_nOA_1}$. В тех точках, где окружность касается сторон многоугольника, радиус и сторона образуют прямой угол, то есть в n треугольниках $A_1OA_2, \ldots, A_{n-1}OA_n$, A_nOA_1 радиус вписанной окружности является высотой. Отсюда площадь каждого треугольника равна половине произведения стороны и радиуса: $S_n = \frac{1}{2}r\cdot A_1A_2 + \ldots + \frac{1}{2}r\cdot A_{n-1}A_n +$ $+ \frac{1}{2}r\cdot A_nA_1 = \frac{1}{2}r\left(A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n + A_nA_1\right) = \frac{1}{2}rP$, где P — периметр многоугольника.

128. Площади подобных фигур

50. ΔEBF подобен ΔABC с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2}$, тогда



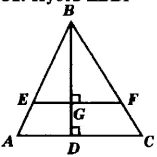
$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot BD$;

$S_{EBF} = \frac{1}{2}EF\cdot BG = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AC\cdot\frac{1}{2}BD = \frac{1}{8}AC\cdot BD$, откуда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{EBF}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD}{\frac{1}{8}AC\cdot BD} = 4 \Rightarrow S_{EBF} = \frac{1}{4}S_{ABC}.$$

Таким образом, $\frac{S_{EBF}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}$.

51. Пусть $\Delta EBF = k\Delta ABC$. Тогда $EF = kAC$, $BG = kBD = kh$. Площадь ΔEBF $S_{EBF} = \frac{1}{2}EF \cdot BG = \frac{1}{2}k^2 AC \cdot h$. Площадь ΔABC $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot h$. Воспользовавшись тем, что $\frac{S_{EBF}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}$, имеем $\frac{1}{2} \cdot \frac{k^2 AC \cdot h}{\frac{1}{2}AC \cdot h} = \frac{1}{2}$,



откуда $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Таким образом, $BG = kh = \frac{h}{\sqrt{2}}$.

52. Пусть периметры правильных n-угольников относятся как $\frac{a}{b}$, тогда $P_1 = \frac{a}{b}P_2$, то есть коэффициент подобия этих фигур равен $\frac{a}{b}$. Отсюда радиусы вписанных в эти правильные n-угольники окружностей также относятся как $\frac{a}{b}$: $r_1 = \frac{a}{b}r_2$.

Поэтому имеем отношение площадей $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot r_1 P_1}{\frac{1}{2} r_2 P_2} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{r_2 P_2}{r_2 P_2} = \frac{a^2}{b^2}$.

129. Площадь круга

53. Площадь круга равна половине произведения длины ограничивающей его окружности на радиус: $S = \frac{1}{2}lr$. Поскольку $l = 2\pi r$, то $r = \frac{l}{2\pi}$, откуда $S = \frac{1}{2}l\frac{l}{2\pi} = \frac{l^2}{4\pi}$.

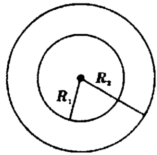
54. Из рисунка видно, что площадь большого круга равна сумме площадей кругового кольца и малого круга: $\pi R_2^2 = \pi R_1^2 + S_{\text{кольца}}$. Поэтому

$S_{\text{кольца}} = \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)$.

1) $S_1 = \pi(6^2 - 4^2)$ см^2 = 20π (см^2).

2) $S_2 = \pi(6{,}5^2 - 5{,}5^2)$ м^2 = $\pi(42{,}25 - 30{,}25)$ м^2 = 12π (м^2).

3) $S_3 = \pi(a^2 - b^2)$.



55. Формула для вычисления площади окружности:

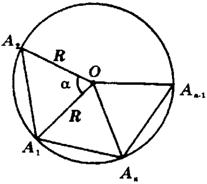
$S = \pi R^2$. Так как $D = 2R$, то $R = \frac{D}{2}$, откуда $S = \pi\frac{D^2}{4}$.

1) $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi D_2^2}{4 \cdot \frac{\pi D_1^2}{4}} = \frac{D_2^2}{D_1^2} = \frac{4D_1^2}{D_1^2} = 4$.

2) $\frac{S_2}{S_1} = \frac{D_2^2}{D_1^2} = \frac{(5D_1)^2}{D_1^2} = 25$.

3) $\frac{S_2}{S_1} = \frac{(mD_1)^2}{D_1^2} = m^2$.

56. Площадь круга, в который вписан n-угольник, равна $S = \pi R^2$. Площадь



n-угольника $A_1A_2 \dots A_n$ равна сумме площадей n треугольников $A_1OA_2, \dots, A_{n-1}OA_n, A_nOA_1$, то есть $S_n = nS_{A_1OA_2}$. Треугольник A_1OA_2 — равнобедренный с боковой стороной $A_1O = A_2O = R$ и углом при вершине $\alpha = \dfrac{360^\circ}{n}$. Таким образом, площадь ΔA_1OA_2 $S_{A_1OA_2} = \dfrac{1}{2}R^2 \sin\dfrac{360^\circ}{n}$. Поэтому площадь n-угольника $S_n = nS_{A_1OA_2} = \dfrac{n}{2}R^2\sin\dfrac{360^\circ}{n}$. Имеем отношение площади круга к площади вписанного в него n-угольника:

$$\frac{S}{S_n} = \frac{\pi R^2}{\frac{n}{2}R^2\sin\frac{360^\circ}{n}} = \frac{2\pi}{n\sin\frac{360^\circ}{n}}.$$

1) $\dfrac{S}{S_4} = \dfrac{2\pi}{4\sin 90^\circ} = \dfrac{\pi}{2}$. 2) $\dfrac{S}{S_3} = \dfrac{2\pi}{3\sin 120^\circ} = \dfrac{2\pi}{3\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

3) $\dfrac{S}{S_6} = \dfrac{2\pi}{6\sin 60^\circ} = \dfrac{\pi}{3\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

57. Площадь круга, вписанного в правильный n-угольник: $S_{\text{впис}} = \pi r^2$. Площадь круга, описанного около правильного n-угольника: $S_{\text{опис}} = \pi R^2$. Сторона правильного n-угольника $a_n = 2r\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$. С другой стороны, $a_n = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$, откуда $2R\sin\dfrac{180^\circ}{n} = 2r\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$, и $r = R\cos\dfrac{180^\circ}{n}$.

Таким образом, $\dfrac{S_{\text{впис}}}{S_{\text{опис}}} = \dfrac{\pi r^2}{\pi R^2} = \dfrac{R^2\cos^2\frac{180^\circ}{n}}{R^2} = \cos^2\dfrac{180^\circ}{n}$.

Для треугольника $n = 3$: $\dfrac{S_{\text{впис}}}{S_{\text{опис}}} = \cos^2 60^\circ = \dfrac{1}{4}$.

58. По результатам предыдущей задачи: $\dfrac{S_{\text{впис}}}{S_{\text{опис}}} = \cos^2\dfrac{180^\circ}{n}$. Тогда $\dfrac{S_{\text{опис}}}{S_{\text{впис}}} = \dfrac{1}{\cos^2\frac{180^\circ}{n}}$.

Для квадрата $n = 4$: $\dfrac{S_{\text{опис}}}{S_{\text{впис}}} = \dfrac{1}{\cos^2 45^\circ} = \dfrac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2.$

59. Площади кругового сектора определим по формуле: $S = \dfrac{\pi R^2}{360^\circ}\alpha_{\text{град}}$, где $\alpha_{\text{град}}$ — градусная мера соответствующего центрального угла.

1) $S_1 = \dfrac{\pi R^2}{360^\circ}40^\circ = \dfrac{\pi R^2}{9}$; 2) $S_2 = \dfrac{\pi R^2}{360^\circ}90^\circ = \dfrac{\pi R^2}{4}$;

3) $S_3 = \frac{\pi R^2}{360°} 150° = \frac{5}{12}\pi R^2$; 4) $S_4 = \frac{\pi R^2}{360°} 240° = \frac{2}{3}\pi R^2$;

5) $S_5 = \frac{\pi R^2}{360°} 300° = \frac{5}{6}\pi R^2$; 6) $S_6 = \frac{\pi R^2}{360°} 330° = \frac{11}{12}\pi R^2$.

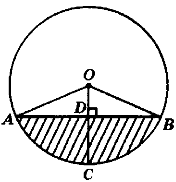
60. Площадь круга равна половине произведения длины ограничивающей его окружности на радиус: $S_{\text{круга}} = \frac{1}{2} l_{\text{круга}} R$. В соответствии с этим площадь сектора, ограниченного дугой $l_{\text{сект}}$, равна половине произведения длины этой дуги на радиус окружности: $S_{\text{сект}} = \frac{1}{2} l_{\text{сект}} R$. Таким образом: 1) $l_{\text{сект}} = R$; $S_{\text{сект}} = \frac{R^2}{2}$;

2) $l_{\text{сект}} = l$; $S_{\text{сект}} = \frac{lR}{2}$.

61. Рассмотрим $\Delta\, DOB$: $OB^2 = R^2 = OD^2 + DB^2 = (R - DC)^2 + \frac{AB^2}{4} = R^2 - 2R \cdot DC +$

$+ DC^2 + \frac{AB^2}{4}$. Тогда $R = \dfrac{DC^2 + \frac{AB^2}{4}}{2DC} = \dfrac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2\left(\sqrt{3}\right)^2}{4}}{2\frac{a}{2}} =$

$= \frac{a}{4} + \frac{3}{4}a = a.$



Таким образом, площадь треугольника AOB:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot OD = \frac{1}{2}AB(OC - DC) = \frac{1}{2}a\sqrt{3}\left(a - \frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

В ΔAOB: $\angle AOB = 2\angle DOB$. В треугольнике ODB $OB = \frac{DB}{\sin\angle DOB}$, откуда

$$\sin\angle DOB = \frac{DB}{OB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда угол $\angle DOB = 60°$, откуда $\angle AOB = 120°$.

Площадь сектора $S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot 120° = \frac{\pi a^2}{3}$. Площадь сегмента равна разности площадей сектора и треугольника AOB:

$$S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} - S_{AOB} = a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

62. Воспользуемся формулой для вычисления площади правильного n-угольника по радиусу описанной около него окружности (см. задачу 56):

$$S_n = \frac{n}{2} R^2 \sin\frac{360°}{n}.$$

Площадь этой части круга, находящейся вне описанного в него правильного n-угольника, равна:

$S = S_{\text{круга}} - S_n = \pi R^2 - R^2 \frac{n}{2} \sin\frac{360^\circ}{n} = R^2\left(\pi - \frac{n}{2}\sin\frac{360^\circ}{n}\right)$. Таким образом:

1) $S_4 = R^2\left(\pi - \frac{4}{2}\sin 90^\circ\right) = R^2(\pi - 2);$

2) $S_3 = R^2\left(\pi - \frac{3}{2}\sin 120^\circ\right) = R^2\left(\pi - \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = R^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right);$

3) $S_6 = R^2\left(\pi - \frac{6}{2}\sin 60^\circ\right) = R^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$